

## PRECOMPRESSIONE OTTIMALE IN STRUTTURE A TELAIO

**Fabio Biondini** <sup>(1)</sup>

### SOMMARIO

Il lavoro è dedicato al problema dell'ottimizzazione della *forza di precompressione* e del *tracciato dei cavi* in strutture a telaio post-tese, soggette a condizioni di carico multiple fra loro indipendenti ed in generale agenti in fasi temporali distinte.

Si considera la struttura suddivisa in elementi di trave. L'azione della precompressione viene simulata con l'applicazione di un sistema di carichi autoequilibrato equivalente, definito tenendo conto, in forma approssimata, delle perdite di tensione istantanee e differite. Il problema strutturale viene quindi ridotto a forma algebrica e, mediante un'opportuna trasformazione di variabili, tradotto in un problema matematico di programmazione lineare. In particolare la formulazione proposta identifica, in un certo numero di sezioni, i valori di intensità e di eccentricità della forza di precompressione che definiscono la soluzione di minimo costo, nel rispetto di limiti sia sull'entità delle forze di precompressione e sul tracciato dei cavi, sia sullo stato di sforzo e spostamento. Il lavoro si conclude con due applicazioni che mostrano come la procedura proposta, una volta discretizzata la struttura e definite le condizioni al contorno, conduca in maniera diretta alla soluzione del problema di ottimizzazione.

---

<sup>(1)</sup> Dottorando, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano.

Diplomato presso la Scuola di Specializzazione in Costruzioni in C.A. "F.lli Pesenti".

## 1. INTRODUZIONE

La progettazione di strutture precomprese segue generalmente procedimenti di tipo iterativo nei quali, per approssimazioni successive e sulla base dell'esperienza e dell'intuizione del progettista, si ricerca la soluzione *migliore* nell'ambito di soluzioni di tentativo che soddisfino assegnati *vincoli progettuali*. Il riferimento infatti a soluzioni strutturali particolari, quali ad esempio quelle definite dalle condizioni di concordanza dei cavi (Burgoyne, 1988a, 1988b), benché consenta di formulare il problema in maniera univoca, non permette in generale di operare secondo criteri di *massima economia* (Migliacci, 1991). La ricerca deve quindi rivolgersi a criteri di ottimizzazione di tipo generale, legati ad esempio a considerazioni sul comportamento strutturale (Bontempi *et al.*, 1998), oppure associati a condizioni di minimo costo (Goble & Lapay, 1971) o di minimo peso (Birkeland, 1974). In quest'ultimo caso, benché entrambe tali condizioni conducano a risultati spesso simili (Naaman, 1976), i criteri di minimo costo sono quelli comunemente adottati. Posto in questi termini il problema della progettazione ottimale di strutture precomprese si colloca quindi nel campo più generale dell'ottimizzazione strutturale (Sawko, 1978; Kirsch, 1993).

In letteratura particolare attenzione è stata rivolta al caso delle travi. La formulazione generale assume come variabili di progetto sia la forza di precompressione ed il tracciato dei cavi, sia alcune caratteristiche geometriche della sezione trasversale e richiede il rispetto di condizioni di progetto sia in fase di esercizio, sia in fase ultima, riconducendo il problema strutturale ad un problema matematico di ottimizzazione non lineare. In questi casi la disponibilità di strumenti di calcolo automatico di tipo *interattivo* può certamente ridurre l'onere computazionale e costituire un valido ausilio alla progettazione (Cope & Bungey, 1976; Bungey, 1979), ma non consente di risolvere il problema in modo *diretto*. A tal fine, la soluzione del problema di ottimizzazione può ottenersi per via analitica sulla base di criteri matematici di estremo (Han *et al.*, 1995, 1996a, 1996b), oppure per via numerica mediante tecniche di programmazione matematica (Francis, 1972; Cohn & MacRae, 1984; Lounis & Cohn, 1993; Cohn & Lounis, 1993). In entrambi i casi comunque, le applicazioni riguardano generalmente travi semplicemente appoggiate o al più travi continue su tre appoggi e ricercano la soluzione per un unico livello di precompressione iniziale e nell'ambito di una assegnata conformazione dei cavi. Tali limitazioni sono dovute al fatto che i metodi analitici risultano di pratica applicazione solo in casi relativamente semplici, mentre i metodi numerici si rivelano efficienti solo finché il numero delle variabili di progetto si mantiene limitato. Le tecniche di programmazione matematica sembrano comunque quelle che meglio si prestano ad una trattazione sistematica del problema, anche se l'adozione di variabili di progetto di natura molto diversa, quali ad esempio la forza di precompressione e le dimensioni geometriche delle sezioni, può rendere il problema numerico mal condizionato.

La verifica delle condizioni di progetto in fase ultima deve necessariamente tenere conto dell'effettivo comportamento non lineare dei materiali (Malerba, 1998). Si osserva comunque che, nel caso particolare in cui la sezione trasversale della trave risulti assegnata, le maggiori restrizioni nella definizione del sistema di precompressione sono generalmente imposte dal rispetto di limiti tensionali e deformativi nella fase di esercizio, per la quale il comportamento dei materiali può considerarsi con buona approssimazione di tipo elastico lineare. Limitatamente a questa fase, la risposta strutturale del sistema risulta correlata linearmente alle variabili di progetto (Magnet, 1954) e il problema di ottimizzazione della precompressione può ricondursi ad un problema di programmazione lineare (Bengtsson & Wolf, 1973; Kirsch, 1973*a*, 1973*b*; Utrilla & Samartin, 1997). Il grande vantaggio di una tale impostazione è legato sia alla convessità del problema matematico, ovvero all'assenza di punti di estremo locale, sia all'efficienza degli algoritmi risolutivi, che in questo caso conducono alla soluzione esatta in un numero finito di iterazioni (Hadley, 1962). Alcuni tentativi di applicare tale formulazione anche a casi più generali, seppure nell'ambito di elementi di tipo prismatico, prevedono ad esempio una scelta di tipo interattivo fra sezioni di forma e dimensioni predeterminate (Johnson, 1972), oppure operano una linearizzazione di alcune condizioni di progetto (Kirsch, 1972; Morris, 1978). Alternativamente è stato proposto di suddividere il problema in due livelli, nel primo dei quali si ottimizza il sistema di precompressione, mentre nel secondo si ottimizza la geometria della sezione trasversale (Kirsch, 1985, 1997). Questo modo di procedere, benché consenta di mitigare il rischio di mal condizionamenti numerici legati alla contemporanea presenza di grandezze incognite di natura diversa, non permette comunque di superare le problematiche associate alle non linearità del problema nella seconda fase di soluzione.

In questo lavoro si riprende il problema dell'ottimizzazione della forza di precompressione e del tracciato dei cavi in elementi strutturali di geometria assegnata, in generale non prismatici e soggetti a condizioni di carico multiple. In particolare si generalizza la formulazione al caso delle strutture a telaio con tracciato dei cavi avente conformazione qualunque (Biondini, 1998) e si mostra come la procedura proposta, una volta discretizzata la struttura e definite le condizioni al contorno, conduca in modo diretto ad una soluzione ottimale del problema.

## **2. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA**

Si considera un telaio piano, ovvero una struttura modellata come un insieme di aste rette aventi sezione trasversale simmetrica e interconnesse in punti nodali appartenenti al piano di simmetria nel quale si assume agiscano anche i carichi. Nell'ipotesi che forma e dimensioni delle sezioni trasversali degli elementi siano definite in base a considerazioni di estetica e

funzionalità e nel rispetto di proporzioni e standard costruttivi, si vuole individuare un sistema di precompressione, ovvero il tiro e il tracciato dei cavi in ogni elemento presollecitato, che costituisca la soluzione di minimo costo nel rispetto di alcuni limiti che assicurino la resistenza e la funzionalità strutturale per un assegnato insieme di condizioni di carico fra loro indipendenti e in generale agenti in fasi temporali distinte.

Nel seguito, con riferimento ad una struttura costituita da  $M$  elementi di cui solo i primi  $M_p \leq M$  precompressi, le componenti di forze e spostamenti nei sistemi di riferimento locale  $(x', y')$  e globale  $(x, y)$  e le caratteristiche della sollecitazione lungo l'asta orientata si considerano positive se concordi con le convenzioni in Fig. 1.

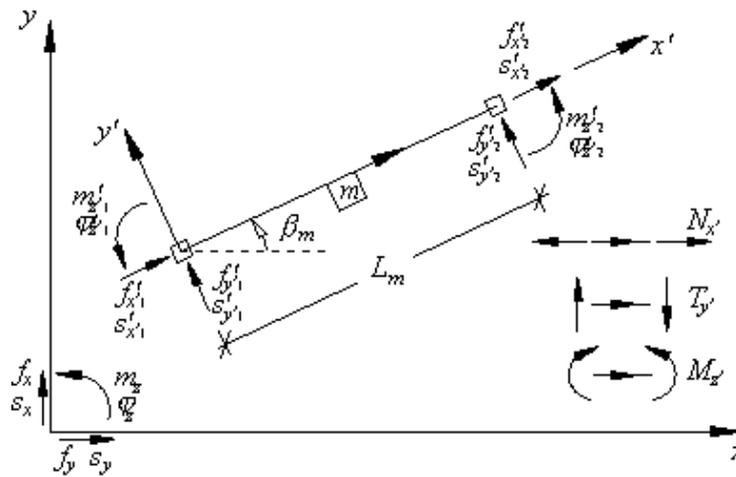


Fig. 1 - Sistemi di riferimento e convenzioni di segno.

### 3. MODELLAZIONE DELLA PRECOMPRESSIONE

Si assume di operare sul *cavo risultante*, ovvero sul cavo ideale definito dalla traiettoria della risultante degli sforzi di precompressione in ogni sezione (*forza di precompressione*).

#### 3.1. Tracciato dei cavi

Al fine di non limitare la trattazione ad assegnate conformazioni del cavo risultante, il generico elemento  $m = 1, 2, \dots, M_p$  viene suddiviso in  $(N_m - 1)$  conci delimitati da  $N_m$  sezioni e il tracciato in generale curvilineo del cavo si considera rettilineo in ogni conco. In tale ipotesi la configurazione del cavo risulta definita unicamente dalla quota  $Y_n = Y(x'_n)$  del suo baricentro in ogni sezione  $n = 1, 2, \dots, N_m$ , ad esempio misurata per comodità rispetto al lembo inferiore della sezione più depressa (Fig. 2). Le approssimazioni così introdotte potranno sempre migliorarsi sia aumentando il numero  $N_m$  delle sezioni di riferimento, sia variando la loro posizione  $x'_n$ .

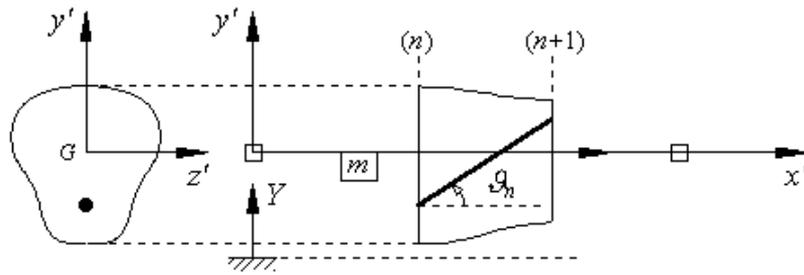


Fig. 2 - Tracciato del cavo risultante nel concio  $n$  del generico elemento  $m$ .

### 3.2. Forza di precompressione

La variazione spaziale e temporale della forza di precompressione  $P$  rispetto ai valori assunti nelle sezioni di tesatura all'atto del tiro dipende dalla corrispondente distribuzione delle perdite di tensione istantanee e differite.

#### 3.2.1. Perdite istantanee

Focalizzando l'attenzione su elementi post-tesi, si assume che eventuali perdite per effetto mutuo siano compensate all'atto del tiro e che le perdite indotte dal rientro dei cavi all'ancoraggio, qualora non compensate anch'esse all'atto del tiro, possano essere simulate con sufficiente approssimazione stimando l'ampiezza della zona di influenza, discretizzando ulteriormente l'elemento ed imponendo la continuità. Pertanto come unica perdita istantanea si considera quella dovuta alla resistenza per attrito che si sviluppa lungo i cavi.

Con riferimento allo schema in Fig. 3, a meno di infinitesimi di ordine superiore la condizione di equilibrio di un tratto elementare di cavo fornisce (Roca & Mari, 1993):

$$d(P\mathbf{t}) + (p_n ds)\mathbf{n} + (p_t ds)\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad P \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{dP}{ds} \mathbf{t} + p_n \mathbf{n} + p_t \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (1)$$

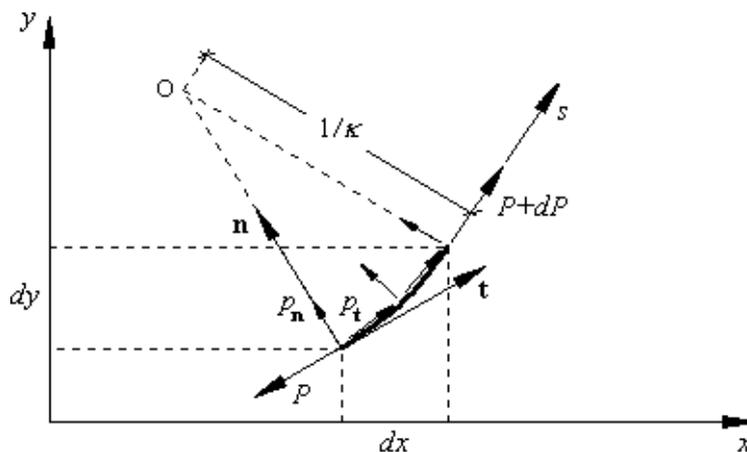


Fig. 3 - Equilibrio di un tratto elementare di cavo.

essendo  $p_n$ ,  $p_t$ , le componenti della pressione di contatto nella direzione dei versori rispettivamente normale  $\mathbf{n}$  e tangenziale  $\mathbf{t}$  nel sistema di riferimento curvilineo  $s$  solidale al cavo. Introducendo la relazione geometrica:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} \quad (2)$$

con  $\kappa$  curvatura locale del cavo, si ha quindi:

$$(P\kappa + p_n)\mathbf{n} + \left(\frac{dP}{ds} + p_t\right)\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_n = -P\kappa \\ p_t = -\frac{dP}{ds} \end{cases} \quad (3)$$

ovvero, nell'ipotesi che le componenti  $p_n$  e  $p_t$  risultino correlate da una legge di attrito alla Coulomb con coefficiente di attrito  $\mu \geq 0$ :

$$p_t = \pm\mu|p_n| \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{ds} = \pm\mu P|\kappa| \quad (4)$$

Assumendo un verso di scorrimento relativo del cavo discorde con il sistema di riferimento  $s$  ed ipotizzando  $\mu = cost.$ , integrando con la condizione  $P(0) = P_0$  si ottiene la seguente legge di variazione della forza di pretensione lungo il cavo:

$$P(s) = P_0 \exp\left(-\mu \int_0^s |\kappa| d\zeta\right) = \alpha(s)P_0 \quad (5)$$

che in generale dipende pertanto dal *cumulo delle curvature* in  $[0; s]$ .

Con il modello adottato per il cavo risultante, nei tratti rettilinei la curvatura è nulla e il tiro si mantiene costante. Nei punti dove il cavo varia bruscamente la sua giacitura si sviluppa invece una resistenza per attrito associata alla pressione localizzata che nasce per equilibrio in virtù della deviazione angolare del cavo (Keyder, 1990). Con un tracciato rettilineo a tratti le perdite per attrito si concentrano pertanto nei punti di discontinuità della derivata della funzione  $\kappa = \kappa(s)$  ed il valore locale della forza di pretensione  $P(s)$  dipende dal *cumulo delle deviazioni angolari* in  $[0; s]$ . In vista degli sviluppi successivi e pensando ad un tracciato di progetto in realtà curvilineo, si semplifica il problema considerando tali perdite come distribuite lungo il cavo ed associate ad un valore medio di curvatura  $\bar{\kappa} = cost.$  da verificare a posteriori. Si tiene conto inoltre di deviazioni non intenzionali del tracciato reale da quello teorico introducendo una curvatura *addizionale*  $\kappa' \geq 0$  del cavo. Indicando con  $\mu' \geq 0$  il coefficiente di attrito accidentale, si ottiene quindi:

$$\alpha(s) = \exp\left[-\mu\left(\bar{\kappa} + \frac{\mu'}{\mu}\kappa'\right)s\right] = \exp(-\mu\kappa^*s) \quad (6)$$

con la forza di pretensione  $P(s)$  che dipende ora *solo* dalla posizione  $s$ .

Ciò premesso, si osserva che negli elementi precompressi ordinari generalmente  $P(s)$  non differisce molto da  $P_0$ , potendosi così assumere:

$$\alpha(s) \cong 1 - \mu\kappa^* s \quad (7)$$

con un'approssimazione che non supera il 5% circa per  $\mu\kappa^* s \leq 0.25$ . Inoltre nei casi usuali l'inclinazione  $\mathcal{G}$  del cavo rispetto all'asse baricentrico  $x'$  è molto piccola ( $\mathcal{G} \ll 1$ ), per cui si ha:

$$dx' = \cos \mathcal{G} ds \cong ds \quad (8)$$

In definitiva, per un generico elemento di lunghezza  $L$  si assume:

$$\alpha(\xi) \cong 1 - \frac{\lambda}{2}(1 + \nu - 2\nu\xi) \quad (9)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} \xi = x'/L &\in [0; 1] & \left\{ \begin{array}{l} \nu = -1 \quad , \text{ se } \xi_0 = 0 \\ \nu = 1 \quad , \text{ se } \xi_0 = 1 \end{array} \right. \\ \lambda = \mu\kappa^* L &\in [0; 1] \end{aligned} \quad (10)$$

con  $\xi_0$  ascissa adimensionalizzata della sezione di tesatura, nell'ipotesi che tutti i cavi siano tesati da uno dei due estremi. Si potrà tenere conto del caso in cui alcuni o tutti i cavi vengano tesati da entrambi gli estremi discretizzando ulteriormente l'elemento in corrispondenza della sezione in cui si inverte la resistenza d'attrito ed imponendo la continuità.

### 3.2.2. Perdite differite

Le perdite differite nel tempo dipendono dai fenomeni di ritiro e viscosità del calcestruzzo e di rilassamento dell'acciaio. In particolare le perdite per viscosità e rilassamento dipendono rispettivamente dallo stato tensionale e deformativo incognito che si instaura sotto i carichi permanenti, mentre le perdite per ritiro ne sono indipendenti. Una valutazione rigorosa di tali perdite deve inoltre tenere conto della loro interdipendenza (Lin & Burns, 1982).

Nella presente trattazione si assume in prima approssimazione che le perdite differite in ogni elemento risultino costanti lungo il cavo. In tale ipotesi, per una struttura soggetta a  $Q$  condizioni di carico fra loro indipendenti e in generale agenti in fasi temporali distinte, la forza di precompressione nella fase  $q = 1, 2, \dots, Q$  si ottiene applicando un opportuno fattore riduttivo  $\eta^q \leq 1$  al corrispondente valore assunto nella configurazione iniziale di riferimento:

$$P^q(\xi) = \eta^q P(\xi) = \eta^q \alpha(\xi) P_0 \quad (11)$$

Nell'ambito dell'approssimazione introdotta, si opera quindi con una stima dei coefficienti  $\eta^q$  in ogni elemento. Tale stima può sempre migliorarsi per approssimazioni successive tenendo conto dell'effettivo regime tensionale e deformativo che si instaura nella fase di interesse.

### 3.3. Sistema equivalente

L'azione della precompressione può essere simulata mediante l'applicazione di un sistema *autoequilibrato* di carichi equivalente definito *sistema equivalente alla precompressione* (Parme & Paris, 1951; Cestelli Guidi, 1987). Nel caso in esame tale sistema è costituito da un insieme di tensioni distribuite lungo i cavi e forze concentrate sia agli estremi degli elementi, sia in corrispondenza delle sezioni dove i cavi variano bruscamente la loro giacitura. Trascurando infatti gli effetti sulla forza di precompressione indotti dalla deformazione sia all'atto del tiro, sia nelle fasi di carico successive, su ogni tratto di cavo risultante nella

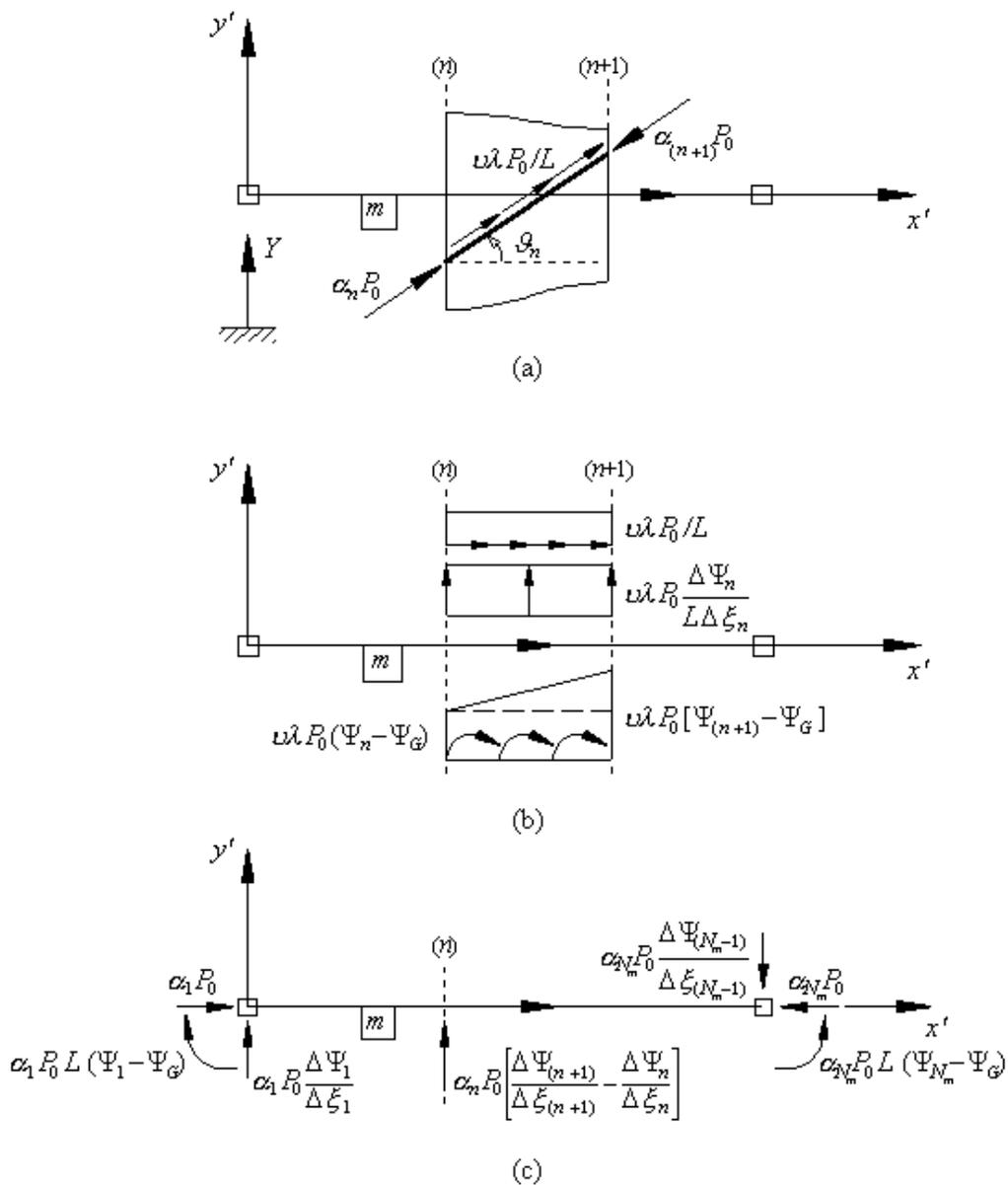


Fig. 4 - Sistema di carichi equivalente alla precompressione: (a) concio  $n$  dell'elemento  $m$ ; componenti nel riferimento locale dei carichi (b) distribuiti e (c) concentrati.

configurazione iniziale di riferimento agisce una pressione di contatto di componenti ( $\mathcal{G} \ll 1$ ):

$$\begin{cases} p_n = -P\kappa = 0 \\ p_t = -\frac{dP}{ds} \cong -\frac{dP}{dx'} = -\frac{1}{L} \frac{dP}{d\xi} = -\frac{d\alpha}{d\xi} \frac{P_0}{L} = -\nu\lambda \frac{P_0}{L} \end{cases} \quad (12)$$

equilibrata dal tiro alle estremità (Fig. 4.a). Sul corrispondente elemento precompresso agisce pertanto una pressione uguale e contraria che nel riferimento locale baricentrico ( $x', y'$ ) risulta descritta in ogni concio  $n$  da una distribuzione tensionale di componenti (Fig. 4.b):

$$\begin{cases} p_{x'n}(\xi) = p_n \sin \mathcal{G}_n - p_t \cos \mathcal{G}_n = \nu\lambda \frac{P_0}{L} \cos \mathcal{G}_n \cong \nu\lambda \frac{P_0}{L} \\ p_{y'n}(\xi) = -p_n \cos \mathcal{G}_n - p_t \sin \mathcal{G}_n = \nu\lambda \frac{P_0}{L} \sin \mathcal{G}_n \cong \nu\lambda \frac{P_0}{L} \mathcal{G}_n \cong \nu\lambda \frac{P_0}{L} \frac{\Delta\Psi_n}{\Delta\xi_n} \\ c_{z'n}(\xi) = p_{x'n}[Y(\xi) - Y_G] = p_{x'n}L[\Psi(\xi) - \Psi_G] \cong \nu\lambda P_0 \left( \frac{\Delta\Psi_n}{\Delta\xi_n} \xi + \frac{\xi_{n+1}\Psi_n - \xi_n\Psi_{n+1}}{\Delta\xi_n} - \Psi_G \right) \end{cases} \quad (13)$$

essendo  $Y_G$  la quota dell'asse baricentrico  $x'$  ed avendo posto  $\Psi = Y/L$ . A tale distribuzione tensionale si associa un sistema di forze concentrate agli estremi dei conci che nel riferimento locale baricentrico risulta descritto dalle componenti (Fig. 4.c):

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} P_{x'n} &= \alpha_n P_0 \cos \mathcal{G}_n \cong \alpha_n P_0 \\ P_{y'n} &= \alpha_n P_0 \sin \mathcal{G}_n \cong \alpha_n P_0 \mathcal{G}_n \cong \alpha_n P_0 \frac{\Delta\Psi_n}{\Delta\xi_n} \\ C_{z'n} &= -P_{x'n}(Y_n - Y_G) \cong -\alpha_n P_0 (Y_n - Y_G) = -\alpha_n L P_0 (\Psi_n - \Psi_G) \end{aligned} \right\} n=1 \\ \left. \begin{aligned} P_{x'n} &= \alpha_n P_0 (\cos \mathcal{G}_{n-1} - \cos \mathcal{G}_n) \cong 0 \\ P_{y'n} &= \alpha_n P_0 (\sin \mathcal{G}_{n-1} - \sin \mathcal{G}_n) \cong \alpha_n P_0 \Delta \mathcal{G}_n \cong \alpha_n P_0 \left( \frac{\Delta\Psi_{n+1}}{\Delta\xi_{n+1}} - \frac{\Delta\Psi_n}{\Delta\xi_n} \right) \\ C_{z'n} &= -P_{x'n}(Y_n - Y_G) \cong 0 \end{aligned} \right\} n=2, \dots, (N_m - 1) \quad (14) \\ \left. \begin{aligned} P_{x'n} &= -\alpha_n P_0 \cos \mathcal{G}_{n-1} \cong -\alpha_n P_0 \\ P_{y'n} &= -\alpha_n P_0 \sin \mathcal{G}_{n-1} \cong -\alpha_n P_0 \mathcal{G}_{n-1} \cong -\alpha_n P_0 \frac{\Delta\Psi_{n-1}}{\Delta\xi_{n-1}} \\ C_{z'n} &= -P_{x'n}(Y_n - Y_G) \cong \alpha_n P_0 (Y_n - Y_G) = \alpha_n L P_0 (\Psi_n - \Psi_G) \end{aligned} \right\} n=N_m \end{cases}$$

Si osservi che l'operatore  $\Delta$  associato ad una grandezza di pedice  $n$  denota la differenza fra i valori che tale grandezza assume nelle sezioni  $(n+1)$  e  $n$ , ovvero nei conci  $n$  e  $(n-1)$ .



con  $E_m$ ,  $\nu_m$ , modulo di Young e coefficiente di Poisson del materiale e  $A_m$ ,  $J_{z'm}$ ,  $\chi_{y'm}$ , area, momento d'inerzia e fattore di taglio della sezione. Operando una trasformazione di coordinate nella forma (Livesley, 1975):

$$\mathbf{f}_m + \mathbf{f}_{em} + \mathbf{f}_{pm} = \mathbf{B}_m (\mathbf{f}'_m + \mathbf{f}'_{em} + \mathbf{f}'_{pm}) \quad (18.a)$$

$$\mathbf{s}_m = \mathbf{B}_m \mathbf{s}'_m \quad (18.b)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{B}_m \mathbf{K}'_m \mathbf{B}_m^T \quad (18.c)$$

con  $\mathbf{B}_m$  matrice di trasformazione dell'elemento (Fig. 2):

$$\mathbf{B}_m = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{1m} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{B}_{1m} \end{array} \right], \quad \mathbf{B}_{1m} = \begin{bmatrix} \cos \beta_m & -\sin \beta_m & 0 \\ \sin \beta_m & \cos \beta_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

l'equilibrio del generico elemento  $m$  può esprimersi nel riferimento globale come segue:

$$\mathbf{f}_m + \mathbf{f}_{em} + \mathbf{f}_{pm} = \mathbf{K}_m \mathbf{s}_m \quad (20)$$

Assemblando su tutti gli elementi si perviene quindi al seguente sistema di  $\ell$  equazioni che esprime l'equilibrio dell'intera struttura:

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_p = \mathbf{K} \mathbf{s} \quad (21)$$

essendo  $\ell$  il numero totale dei gradi di libertà. Posto infine  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f} + \mathbf{f}_e$ , il sistema assume la forma:

$$\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_p = \mathbf{K} \mathbf{s} \quad (22)$$

che lega le quantità note  $\mathbf{f}_0$  e  $\mathbf{K}$  alle quantità incognite  $\mathbf{f}_p$  e  $\mathbf{s}$ .

## 4.2. Condizioni di carico

Il legame non lineare fra la risposta strutturale e le grandezze incognite  $P_{0m}$  e  $\Psi_{mn}$  che definiscono il sistema equivalente alla precompressione è reso lineare operando la trasformazione di variabili  $P_{1mn} = P_{0m} \Psi_{mn}$ . Con tale scelta, posto:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_0 = [P_{01} \ P_{02} \ \dots \ P_{0M_p}]^T \quad \mathbf{p}_1 = [P_{11} \ P_{12} \ \dots \ P_{1N}]^T \quad (23)$$

in cui:

$$N = \sum_{m=1}^{M_p} N_m \quad (24)$$

la risposta strutturale si esprime in funzione di  $\mathbf{p}$  applicando il principio di sovrapposizione degli effetti una volta nota la risposta all'applicazione isolata sia degli  $(N+M_p)$  sistemi equivalenti  $\mathbf{f}_p^r$

definiti assegnando un valore unitario alla componente  $r$ -esima di  $\mathbf{p}$  con tutte le altre nulle (*coefficienti di influenza*), sia delle  $Q$  condizioni di carico  $\mathbf{f}_0^q$ . La forma dei vettori  $\mathbf{f}_0^q$  dipende quindi dai carichi applicati, mentre i vettori  $\mathbf{f}_p^r$  sono definiti dai sistemi equivalenti mostrati in Fig. 5 per il generico elemento  $m$ . Ad esempio, nel caso particolare di materiale omogeneo, sezione trasversale costante e deformabilità a taglio trascurabile ( $\Phi_{y'm} \cong 0$ ), i corrispondenti  $(N_m + 1)$  vettori delle forze nodali equivalenti nel riferimento locale assumono la forma seguente:

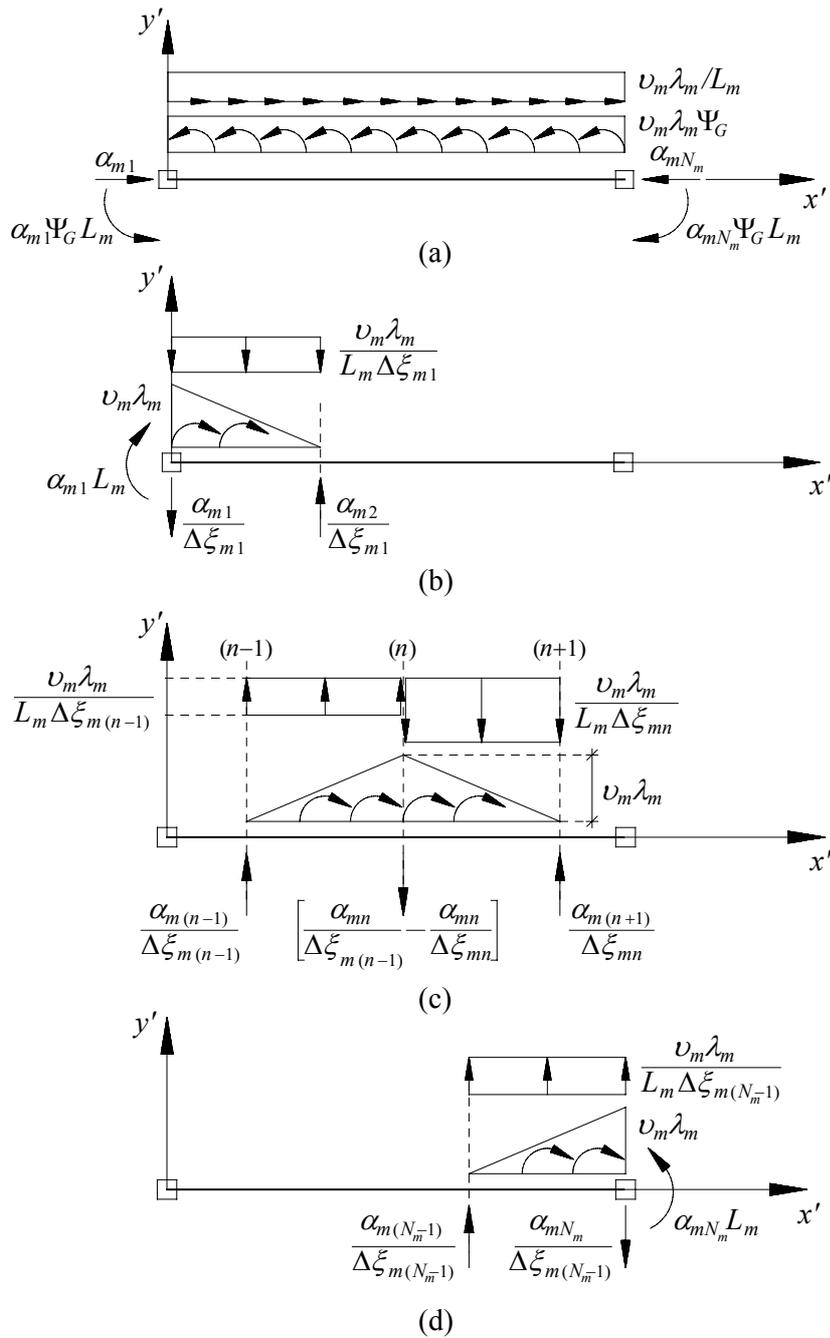


Fig. 5 - Sistemi equivalenti alla precompressione associati a valori unitari delle componenti di  $\mathbf{p}$  con le altre tutte nulle: (a)  $P_{0m} = 1$ ; (b)  $P_{1m1} = 1$ ; (c)  $P_{1mn} = 1$ ; (d)  $P_{1mNm} = 1$ .

$$\mathbf{f}'_{pm0} = \begin{bmatrix} \alpha_{m1} \\ 0 \\ \alpha_{m1} L_m \Psi_{Gm} \\ \alpha_{mN_m} \\ 0 \\ \alpha_{mN_m} L_m \Psi_{Gm} \end{bmatrix} + \nu_m \lambda_m \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\Psi_{Gm} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \Psi_{Gm} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.a)$$

$$\mathbf{f}'_{pm1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho_1^{m1} \\ -\alpha_{m1} L_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_{m2}^2 (3 - 2\bar{\xi}_{m2}) \rho_1^{m1} + 6\xi_{m2} \bar{\xi}_{m2} \omega_1^{m1} \\ \{ \xi_{m2} \bar{\xi}_{m2}^2 \rho_1^{m1} + \bar{\xi}_{m2} (2 - 3\bar{\xi}_{m2}) \omega_1^{m1} + \omega_1^{m1} \} L_m \\ 0 \\ \xi_{m2}^2 (3 - 2\xi_{m2}) \rho_1^{m1} - 6\xi_{m2} \bar{\xi}_{m2} \omega_1^{m1} \\ \{ -\xi_{m2}^2 \bar{\xi}_{m2} \rho_1^{m1} + \xi_{m2} (2 - 3\xi_{m2}) \omega_1^{m1} \} L_m \end{bmatrix} \quad (25.b)$$

$$\mathbf{f}'_{pmn} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{k=-1}^1 \{ \bar{\xi}_{m(n+k)}^2 (3 - 2\bar{\xi}_{m(n+k)}) \rho_k^{mn} + 6\xi_{m(n+k)} \bar{\xi}_{m(n+k)} \omega_k^{mn} \} \\ \sum_{k=-1}^1 \{ \xi_{m(n+k)} \bar{\xi}_{m(n+k)}^2 \rho_k^{mn} + \bar{\xi}_{m(n+k)} (2 - 3\bar{\xi}_{m(n+k)}) \omega_k^{mn} \} L_m \\ 0 \\ \sum_{k=-1}^1 \{ \xi_{m(n+k)}^2 (3 - 2\xi_{m(n+k)}) \rho_k^{mn} - 6\xi_{m(n+k)} \bar{\xi}_{m(n+k)} \omega_k^{mn} \} \\ \sum_{k=-1}^1 \{ -\xi_{m(n+k)}^2 \bar{\xi}_{m(n+k)} \rho_k^{mn} + \xi_{m(n+k)} (2 - 3\xi_{m(n+k)}) \omega_k^{mn} \} L_m \end{bmatrix} \quad n=2, \dots, (N_m - 1) \quad (25.c)$$

$$\mathbf{f}'_{pmN_m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_{-1}^{mN_m} \\ \alpha_{mN_m} L_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_{m(N_m-1)}^2 (3 - 2\bar{\xi}_{m(N_m-1)}) \rho_{-1}^{mN_m} + 6\xi_{m(N_m-1)} \bar{\xi}_{m(N_m-1)} \omega_{-1}^{mN_m} \\ \{ \xi_{m(N_m-1)} \bar{\xi}_{m(N_m-1)}^2 \rho_{-1}^{mN_m} + \bar{\xi}_{m(N_m-1)} (2 - 3\bar{\xi}_{m(N_m-1)}) \omega_{-1}^{mN_m} \} L_m \\ 0 \\ \xi_{m(N_m-1)}^2 (3 - 2\xi_{m(N_m-1)}) \rho_{-1}^{mN_m} - 6\xi_{m(N_m-1)} \bar{\xi}_{m(N_m-1)} \omega_{-1}^{mN_m} \\ \{ -\xi_{m(N_m-1)}^2 \bar{\xi}_{m(N_m-1)} \rho_{-1}^{mN_m} + \xi_{m(N_m-1)} (2 - 3\xi_{m(N_m-1)}) \omega_{-1}^{mN_m} + \omega_{-1}^{mN_m} \} L_m \end{bmatrix} \quad (25.d)$$

in cui  $\bar{\xi} = 1 - \xi$  ed essendo:

$$\rho_{-1}^{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{\Delta \xi_{m(n-1)}} \quad \rho_0^{mn} = -(\rho_{-1}^{mn} + \rho_1^{mn}) \quad \rho_1^{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{\Delta \xi_{mn}} \quad (26.a)$$

$$\omega_{-1}^{mn} = -\frac{1}{6} \nu_m \lambda_m \Delta \xi_{m(n-1)} \quad \omega_0^{mn} = -(\omega_{-1}^{mn} + \omega_1^{mn}) \quad \omega_1^{mn} = -\frac{1}{6} \nu_m \lambda_m \Delta \xi_{mn} \quad (26.b)$$

Si noti che il riferimento alle quote adimensionali  $\Psi_{mn}$  in luogo delle corrispondenti  $Y_{mn}$  consente di operare con variabili  $\mathbf{p}$  dimensionalmente congruenti e quindi di evitare nel processo di soluzione problemi di tipo numerico legati alla presenza di grandezze incognite di natura diversa.

### 4.3. Coefficienti di influenza

I vettori degli spostamenti  $\mathbf{s}_0^q$  e  $\mathbf{s}_p^r$  associati rispettivamente ai vettori dei carichi  $\mathbf{f}_0^q$  e  $\mathbf{f}_p^r$  risultano dalla soluzione del corrispondente sistema di equazioni di equilibrio, in cui anche la matrice di rigidezza che lo definisce risulta in generale funzione della condizione di carico considerata. Infatti, anche nella ragionevole ipotesi che le caratteristiche geometriche non differiscano sensibilmente nelle diverse fasi di carico, come ad esempio avviene per variazioni nella congruenza fra acciaio e calcestruzzo, occorre tenere conto degli effetti dei fenomeni differiti. Si osserva a tale proposito che mentre il rilassamento dell'acciaio d'armatura provoca ai fini pratici solo una riduzione della forza di precompressione, i fenomeni di ritiro e viscosità inducono delle distorsioni che intervengono in maniera diretta a modificare sia il regime cinematico, sia, in condizioni di iperstaticità, il regime statico della struttura. Per quanto riguarda il ritiro, i suoi effetti possono essere simulati mediante l'introduzione di una adeguata distribuzione di variazioni termiche e si riterrà nel seguito che il suo contributo nella fase di interesse sia contenuto nel relativo vettore  $\mathbf{f}_0^q$ . Relativamente alla viscosità si può invece ammettere che il suo unico effetto sia una riduzione del modulo nella forma:

$$E_m^q = \delta_m^q E_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_m^q = \delta_m^q \mathbf{K}_m \quad (27)$$

con  $E_m$  e  $\mathbf{K}_m$  modulo di Young e matrice di rigidezza dell'elemento  $m$  nella configurazione iniziale di riferimento e  $\delta_m^q \leq 1$  coefficiente di riduzione associato alla fase  $q$ . Nel seguito si assumerà in via semplificativa che tale riduzione sia la stessa per tutti gli elementi, ovvero  $\delta_m^q = \delta^q$ , ottenendo così dalla procedura di assemblaggio:

$$\mathbf{K}^q = \delta^q \mathbf{K} \quad (28)$$

In tale ipotesi, l'onere computazionale associato al calcolo degli spostamenti  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_0 \mid \mathbf{S}_p] = [\mathbf{s}_0^1 \ \mathbf{s}_0^2 \ \dots \ \mathbf{s}_0^Q \mid \mathbf{s}_p^1 \ \mathbf{s}_p^2 \ \dots \ \mathbf{s}_p^{(N+M_p)}] \quad (29)$$

per le  $(Q + N + M_p)$  condizioni di carico  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_0 \mid \mathbf{F}_p] = [\mathbf{f}_0^1 \ \mathbf{f}_0^2 \ \dots \ \mathbf{f}_0^Q \mid \mathbf{f}_p^1 \ \mathbf{f}_p^2 \ \dots \ \mathbf{f}_p^{(N+M_p)}] \quad (30)$$

risulta determinato da un'unica operazione di inversione della matrice  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{KSD} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{FD}^{-1} \quad (31)$$

avendo posto:

$$\mathbf{D} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{D}_0 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(N+M_p)} \end{array} \right] \quad \mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \delta^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta^Q \end{bmatrix} \quad (32)$$

L'ipotesi introdotta equivale quindi ad assumere che i fenomeni viscosi non influenzino lo stato di sollecitazione, ma inducano unicamente un'amplificazione dello stato di spostamento iniziale attraverso un fattore  $1/\delta^q$ . Tale semplificazione non è chiaramente applicabile in presenza di variazioni delle condizioni al contorno sugli spostamenti e/o con differenti leggi di variazione del modulo, come ad esempio avviene nel caso di strutture costruite in fasi successive. A tale proposito si osserva che il procedimento di ottimizzazione formulato nel seguito può agevolmente essere esteso anche a questo caso più generale. Tuttavia l'onere computazionale associato alle inversioni delle matrici  $\mathbf{K}^q$  ed alla memorizzazione dei dati cresce molto velocemente con il numero  $Q$  delle condizioni di carico.

## 5. OTTIMIZZAZIONE DELLA PRECOMPRESSIONE

Il vettore  $\mathbf{p}$  che definisce univocamente il sistema di precompressione deve rispettare limiti sia di tipo fisico sul valore delle forze di precompressione e sul tracciato dei cavi, sia di tipo strutturale sullo stato di sforzo e spostamento. Un vettore  $\mathbf{p}$  che soddisfi tali limiti si definisce *vettore ammissibile* o *precompressione ammissibile*. Scelta una funzione di  $\mathbf{p}$  che ne rappresenti il costo relativo, definita *funzione obiettivo*, un vettore ammissibile che la rende minima si definisce *vettore ammissibile ottimale* o *precompressione ottimale*. Nel seguito si mostra che, una volta ridotto a forma algebrica, il problema strutturale di ricerca della precompressione ottimale può essere ricondotto ad un problema di programmazione matematica. In particolare si evidenzia come, con una opportuna rappresentazione della funzione obiettivo ed un'eventuale linearizzazione di alcuni limiti tensionali, il problema matematico diventi lineare in  $\mathbf{p}$  e possa essere risolto con le usuali tecniche della programmazione lineare.

La particolare rappresentazione adottata per i cavi suggerisce di specificare i limiti sul loro posizionamento unicamente nelle  $N$  sezioni di riferimento, potendosi ragionevolmente assumere che così facendo il loro tracciato risulti ammissibile anche nelle sezioni intermedie. I limiti sullo stato di sforzo e spostamento invece, dovrebbero a rigore essere verificati con continuità su tutta la struttura. In particolare lo stato di spostamento andrebbe verificato in ogni sezione degli  $M$  elementi e lo stato tensionale in ogni loro fibra. Il problema può comunque ridursi a

forma algebrica operando una opportuna discretizzazione, ad esempio verificando i limiti sullo stato di spostamento soltanto in un certo numero  $I$  di *sezioni di controllo* e i limiti sullo stato tensionale soltanto in un certo numero  $H$  di *fibre di controllo*, appartenenti in generale a sezioni distinte dalle precedenti. Pur mantenendo tale generalità, per semplicità ed uniformità di notazione nel seguito si considerano  $H_i$  fibre di controllo in ogni sezione  $i = 1, 2, \dots, I$ , essendo:

$$H = \sum_{i=1}^I H_i \quad (33)$$

La regolarità delle funzioni con cui si opera assicura che le approssimazioni implicite in tale discretizzazione possono sempre essere migliorate aumentando il numero  $I$  delle sezioni e il numero  $H$  delle fibre di controllo.

### 5.1. Sollecitazioni e spostamenti nelle sezioni di controllo

Dalla matrice  $\mathbf{S}$  degli spostamenti nodali nel sistema di riferimento globale, ovvero dalla sua partizione  $\mathbf{S}_m$ , è possibile risalire nel sistema di riferimento locale alle matrici:

$$\mathbf{S}'_m = \mathbf{B}_m^T \mathbf{S}_m \quad \mathbf{F}'_m = \mathbf{K}'_m \mathbf{S}'_m \mathbf{D} - \bar{\mathbf{F}}'_m \quad (34)$$

essendo  $\bar{\mathbf{F}}'_m = [\mathbf{F}'_{em} \mid \mathbf{F}'_{pm}] = [\mathbf{f}'_{em}{}^1 \ \mathbf{f}'_{em}{}^2 \ \dots \ \mathbf{f}'_{em}{}^Q \mid \mathbf{f}'_{pm}{}^1 \ \mathbf{f}'_{pm}{}^2 \ \dots \ \mathbf{f}'_{pm}{}^{(N+M_p)}]$ . Le corrispondenti componenti di sollecitazione  $\mathbf{R}_m$  e di spostamento  $\mathbf{U}_m$  nelle sezioni di controllo dell'elemento  $m$  risultano:

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{A}_m^R \mathbf{F}'_m \quad \mathbf{U}_m = \mathbf{A}_m^U \mathbf{S}'_m \quad (35)$$

in cui  $\mathbf{A}_m^R$  e  $\mathbf{A}_m^U$  sono delle matrici rispettivamente di *equilibrio* e *congruenza* costruite valutando nelle sezioni di controllo delle funzioni interpolanti di grado adeguato alle distribuzioni di carico considerate. Quindi, assemblando sugli  $M$  elementi:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_0 \mid \mathbf{R}_p] = [\mathbf{r}_0^1 \ \mathbf{r}_0^2 \ \dots \ \mathbf{r}_0^Q \mid \mathbf{r}_p^1 \ \mathbf{r}_p^2 \ \dots \ \mathbf{r}_p^{(N+M_p)}] \quad (36.a)$$

$$\mathbf{r}_0^q = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{01}^q \\ \mathbf{r}_{02}^q \\ \dots \\ \mathbf{r}_{0I}^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_p^r = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{p1}^r \\ \mathbf{r}_{p2}^r \\ \dots \\ \mathbf{r}_{pI}^r \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{0i}^q = \begin{bmatrix} N_{x'0i}^q \\ T_{y'0i}^q \\ M_{z'0i}^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{pi}^r = \begin{bmatrix} N_{x'pi}^r \\ T_{y'pi}^r \\ M_{z'pi}^r \end{bmatrix} \quad (36.b)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0 \mid \mathbf{U}_p] = [\mathbf{u}_0^1 \ \mathbf{u}_0^2 \ \dots \ \mathbf{u}_0^Q \mid \mathbf{u}_p^1 \ \mathbf{u}_p^2 \ \dots \ \mathbf{u}_p^{(N+M_p)}] \quad (36.c)$$

$$\mathbf{u}_0^q = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{01}^q \\ \mathbf{u}_{02}^q \\ \dots \\ \mathbf{u}_{0I}^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_p^r = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p1}^r \\ \mathbf{u}_{p2}^r \\ \dots \\ \mathbf{u}_{pI}^r \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{0i}^q = \begin{bmatrix} S_{x'0i}^q \\ S_{y'0i}^q \\ \varphi_{z'0i}^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{pi}^r = \begin{bmatrix} S_{x'pi}^r \\ S_{y'pi}^r \\ \varphi_{z'pi}^r \end{bmatrix} \quad (36.d)$$

Si osservi che le matrici  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{U}$  sono state riferite per comodità e senza restrizione di generalità al sistema locale. Qualora i limiti imposti dal problema risultino definiti nel sistema globale si potrà sempre operare una trasformazione di riferimento.

A questo punto, in virtù della linearità del problema in oggetto, le sollecitazioni  $\mathbf{r}$  e gli spostamenti  $\mathbf{u}$  delle sezioni di controllo possono esprimersi in funzione del vettore incognito  $\mathbf{p}$  applicando il *principio di sovrapposizione degli effetti*:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}_0 + \tilde{\mathbf{R}}_p \mathbf{p} \quad (37.a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_p \mathbf{p} \quad (37.b)$$

avendo posto:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^1 \\ \mathbf{r}^2 \\ \dots \\ \mathbf{r}^Q \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}^q = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^q \\ \mathbf{r}_2^q \\ \dots \\ \mathbf{r}_l^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_i^q = \begin{bmatrix} N_{x'i}^q \\ T_{y'i}^q \\ M_{z'i}^q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{r}}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0^1 \\ \mathbf{r}_0^2 \\ \dots \\ \mathbf{r}_0^Q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{R}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p \mathbf{H}^1 \\ \mathbf{R}_p \mathbf{H}^2 \\ \dots \\ \mathbf{R}_p \mathbf{H}^Q \end{bmatrix} \quad (38.a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \dots \\ \mathbf{u}^Q \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^q = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^q \\ \mathbf{u}_2^q \\ \dots \\ \mathbf{u}_l^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_i^q = \begin{bmatrix} S_{x'i}^q \\ S_{y'i}^q \\ \varphi_{z'i}^q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^1 \\ \mathbf{u}_0^2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_0^Q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{U}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \mathbf{H}^1 / \delta^1 \\ \mathbf{U}_p \mathbf{H}^2 / \delta^2 \\ \dots \\ \mathbf{U}_p \mathbf{H}^Q / \delta^Q \end{bmatrix} \quad (38.b)$$

$$\mathbf{H}^q = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0^q & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_1^q & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_{M_p}^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_m^q = \begin{bmatrix} \eta_1^q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_2^q & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \eta_{M_p}^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_m^q = \eta_m^q \mathbf{I}_{N_m} \quad (38.c)$$

## 5.2. Limiti sullo stato tensionale

Lo stato tensionale piano in una generica fibra  $h$  può essere sinteticamente rappresentato dalle componenti normale  $\sigma$  e tangenziale  $\tau$  dello sforzo  $\mathbf{t}_h = [\sigma_h \ \tau_h]^T$  ivi agente. In particolare la condizione di rottura del materiale in corrispondenza di tale fibra nella forma:

$$f_h(\mathbf{t}_h) = 0 \quad (39)$$

descrive nel piano  $(\sigma, \tau)$  una *curva di rottura* che delimita il *dominio di resistenza*:

$$f_h(\mathbf{t}_h) < 0 \quad (40)$$

Il *criterio di resistenza* richiede pertanto che il punto rappresentativo lo stato tensionale appartenga a tale dominio o al più alla sua frontiera, ovvero:

$$f_h(\mathbf{t}_h) \leq 0 \quad (41)$$

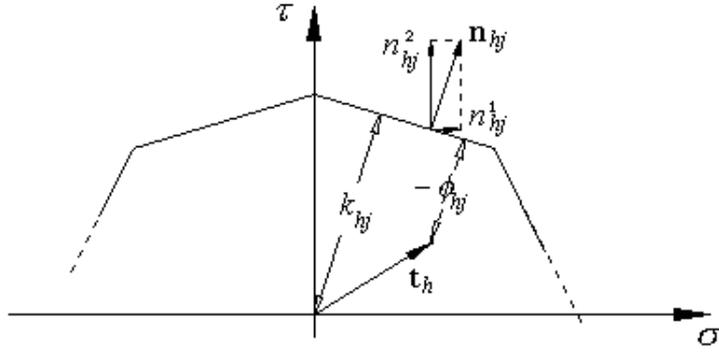


Fig. 6 - Linearizzazione del criterio di resistenza.

Tale criterio stabilisce un legame in generale non lineare nelle variabili  $(\sigma_h, \tau_h)$ . Se alla curva limite si sostituisce una spezzata che la approssimi adeguatamente in modo che il dominio di resistenza risulti *convesso*, il criterio di resistenza si linearizza ed assume la forma seguente:

$$\boldsymbol{\phi}_h = \mathbf{N}_h \mathbf{t}_h - \mathbf{k}_h \leq \mathbf{0} \quad (42)$$

essendo:

$$\mathbf{N}_h = [\mathbf{n}_{h1} \quad \mathbf{n}_{h2} \quad \dots \quad \mathbf{n}_{hJ_h}]^T, \quad \mathbf{n}_{hj} = [n_{hj}^1 \quad n_{hj}^2]^T \quad (43.a)$$

$$\boldsymbol{\phi}_h = [\phi_{h1} \quad \phi_{h2} \quad \dots \quad \phi_{hJ_h}]^T \leq \mathbf{0} \quad \mathbf{k}_h = [k_{h1} \quad k_{h2} \quad \dots \quad k_{hJ_h}]^T \geq \mathbf{0} \quad (43.b)$$

in cui i termini  $n_{hj}^1, n_{hj}^2$ , rappresentano le componenti lungo gli assi  $(\sigma, \tau)$  del versore normale uscente  $\mathbf{n}_{hj}$  al lato  $j=1,2,\dots,J_h$ , mentre i termini  $-\phi_{hj} \geq 0$  e  $k_{hj} \geq 0$  rappresentano la minima distanza di tale lato rispettivamente dal punto  $(\sigma_h, \tau_h)$  e dall'origine degli assi (Fig. 6). Si può dimostrare che il riferimento ad un dominio linearizzato contenuto in quello effettivo consente di operare in favore di sicurezza. Le approssimazioni implicite in tale sostituzione possono comunque sempre migliorarsi aumentando il numero  $J_h$  dei lati del dominio. In particolare, operando iterativamente si può delimitare la zona di crisi lungo la curva di rottura e raffinare la discretizzazione solo nei tratti di interesse (Tin-Loi, 1990).

Ciò premesso, si consideri il criterio di resistenza associato alla fibra  $h=1,2,\dots,H_i$  della sezione  $i=1,2,\dots,I$  per la generica condizione di carico  $q=1,2,\dots,Q$ :

$$\boldsymbol{\phi}_{ih}^q = \mathbf{N}_{ih} \mathbf{t}_{ih}^q - \mathbf{k}_{ih} \leq \mathbf{0} \quad (44)$$

Assemblando sull'intera struttura per tutte le condizioni di carico si ottiene:

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{t}} - \tilde{\mathbf{k}} \leq \mathbf{0} \quad (45)$$

avendo posto:

$$\tilde{\phi} = \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \dots \\ \phi^Q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{N}^Q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^1 \\ \mathbf{t}^2 \\ \dots \\ \mathbf{t}^Q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^1 \\ \mathbf{k}^2 \\ \dots \\ \mathbf{k}^Q \end{bmatrix} \quad (46.a)$$

$$\phi^q = \begin{bmatrix} \phi_1^q \\ \phi_2^q \\ \dots \\ \phi_I^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^q = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{N}_I \end{bmatrix} \quad \mathbf{t}^q = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^q \\ \mathbf{t}_2^q \\ \dots \\ \mathbf{t}_I^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}^q = \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \dots \\ \mathbf{k}_I \end{bmatrix} \quad (46.b)$$

$$\phi_i^q = \begin{bmatrix} \phi_{i1}^q \\ \phi_{i2}^q \\ \dots \\ \phi_{iH_i}^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{i1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{N}_{iH_i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{t}_i^q = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{i1}^q \\ \mathbf{t}_{i2}^q \\ \dots \\ \mathbf{t}_{iH_i}^q \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{i1} \\ \mathbf{k}_{i2} \\ \dots \\ \mathbf{k}_{iH_i} \end{bmatrix} \quad (46.c)$$

Assimilando ogni asta ad un solido alla De Saint Venant, lo stato tensionale  $\mathbf{t}$  risulta correlato linearmente allo stato di sollecitazione  $\mathbf{r}$  attraverso una relazione del tipo:

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{r}} \quad (47)$$

essendo:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}^Q \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}^q = \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_I \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i1} \\ \mathbf{G}_{i2} \\ \dots \\ \mathbf{G}_{iH_i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_{ih} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_i} & 0 & \frac{1}{W_{z'ih}} \\ 0 & \frac{S_{z'ih}}{b_{ih}J_{z'i}} & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

con  $A_i$  area della sezione  $i$ ,  $J_{z'i}$  momento d'inerzia baricentrico della sezione  $i$ ,  $W_{z'ih}$  modulo di resistenza della sezione  $i$  riferito alla fibra  $h$ ,  $S_{z'ih}$  momento statico baricentrico dell'area della sezione  $i$  delimitata dalla fibra  $h$ ,  $b_{ih}$  larghezza della sezione  $i$  in corrispondenza della fibra  $h$ .

Ricordando l'espressione di  $\tilde{\mathbf{r}}$  in funzione di  $\mathbf{p}$ , per il vettore  $\tilde{\mathbf{t}}$  si ottiene quindi l'espressione:

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{r}}_0 + \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{R}}_p \mathbf{p} \quad (49)$$

che sostituita nel criterio di resistenza fornisce:

$$\tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{r}}_0 + \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{R}}_p \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{k}} \leq \mathbf{0} \quad (50)$$

Ponendo quindi:

$$\tilde{\mathbf{T}}_p = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{R}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_p \mathbf{H}^1 \\ \mathbf{T}_p \mathbf{H}^2 \\ \dots \\ \mathbf{T}_p \mathbf{H}^Q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{t}}_0 = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{r}}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_0^1 \\ \mathbf{t}_0^2 \\ \dots \\ \mathbf{t}_0^Q \end{bmatrix} \quad \Delta\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{t}}_0 - \tilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{t}^1 \\ \Delta\mathbf{t}^2 \\ \dots \\ \Delta\mathbf{t}^Q \end{bmatrix} \quad (51)$$

con  $\mathbf{T}_p = \mathbf{N}\mathbf{G}\mathbf{R}_p$ , il criterio di resistenza si esprime infine nella forma:

$$\tilde{\mathbf{T}}_p \mathbf{p} \leq \Delta \tilde{\mathbf{t}} \quad (52)$$

che definisce  $(Q \times J)$  restrizioni lineari nel vettore incognito  $\mathbf{p}$ , con:

$$J = \sum_{h=1}^H J_h \quad (53)$$

Si osservi che il numero di tali restrizioni può ridursi a  $J$  nei casi seguenti:

- (a) le perdite differite sono le stesse per tutte le condizioni di carico ( $\mathbf{H}^q = \mathbf{H}$ ,  $q = 1, 2, \dots, Q$ );
- (b) le perdite differite sono le stesse per tutti gli elementi ( $\eta_m^q = \eta^q$ ,  $m = 1, 2, \dots, M_p$ ).

Posto infatti:

$$(a) \quad \Delta \mathbf{t}_{\min} = \min_q \{ \Delta \mathbf{t}^q \} \quad (54.a)$$

$$(b) \quad \Delta \mathbf{t}_{\min} = \min_q \left\{ \frac{1}{\eta^q} \Delta \mathbf{t}^q \right\} \quad (54.b)$$

in cui l'operatore di minimizzazione si considera applicato alle singole componenti dei vettori  $\Delta \mathbf{t}^q$ , il criterio di resistenza si semplifica rispettivamente come segue:

$$(a) \quad \mathbf{T}_p \mathbf{H} \mathbf{p} \leq \Delta \mathbf{t}_{\min} \quad (55.a)$$

$$(b) \quad \mathbf{T}_p \mathbf{p} \leq \Delta \mathbf{t}_{\min} \quad (55.b)$$

relazioni che definiscono appunto  $J$  restrizioni lineari nel vettore incognito  $\mathbf{p}$ .

### 5.3. Limiti sullo stato di spostamento

Osservando che spostamenti eccessivi possono compromettere l'efficienza strutturale, un *criterio di funzionalità* può esprimersi in maniera diretta nella forma:

$$\tilde{\mathbf{u}}^- \leq \tilde{\mathbf{u}} \leq \tilde{\mathbf{u}}^+ \quad (56)$$

con:

$$\tilde{\mathbf{u}}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_-^1 \\ \mathbf{u}_-^2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_-^Q \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{u}}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_+^1 \\ \mathbf{u}_+^2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_+^Q \end{bmatrix} \quad (57)$$

in cui i vettori  $\mathbf{u}_-^q$  e  $\mathbf{u}_+^q$  rappresentano i valori limite rispettivamente inferiore e superiore per lo stato di spostamento  $\mathbf{u}^q$  associato alla condizione di carico  $q$ . Sostituendo nella relazione precedente l'espressione di  $\tilde{\mathbf{u}}$  in funzione di  $\mathbf{p}$ , si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{u}}^- \leq \tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_p \mathbf{p} \leq \tilde{\mathbf{u}}^+ \quad (58)$$

Ponendo quindi:

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}^- = \tilde{\mathbf{u}}^- - \tilde{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_-^1 \\ \Delta \mathbf{u}_-^2 \\ \dots \\ \Delta \mathbf{u}_-^Q \end{bmatrix} \quad \Delta \tilde{\mathbf{u}}^+ = \tilde{\mathbf{u}}^+ - \tilde{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_+^1 \\ \Delta \mathbf{u}_+^2 \\ \dots \\ \Delta \mathbf{u}_+^Q \end{bmatrix} \quad (59)$$

il criterio di funzionalità si esprime sinteticamente nella forma:

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}^- \leq \tilde{\mathbf{U}}_p \mathbf{p} \leq \Delta \tilde{\mathbf{u}}^+ \quad (60)$$

che definisce  $(6 \times Q \times I)$  restrizioni lineari nel vettore incognito  $\mathbf{p}$ . Anche in questo caso il numero delle restrizioni può ridursi qualora risulti (a)  $\mathbf{H}^q = \mathbf{H}$  oppure (b)  $\eta_m^q = \eta^q$ . Posto infatti:

$$(a) \quad \Delta \mathbf{u}_{\max}^- = \max_q \{ \delta^q \Delta \mathbf{u}_-^q \} \quad \Delta \mathbf{u}_{\min}^+ = \min_q \{ \delta^q \Delta \mathbf{u}_+^q \} \quad (61)$$

$$(b) \quad \Delta \mathbf{u}_{\max}^- = \max_q \left\{ \frac{\delta^q}{\eta^q} \Delta \mathbf{u}_-^q \right\} \quad \Delta \mathbf{u}_{\min}^+ = \min_q \left\{ \frac{\delta^q}{\eta^q} \Delta \mathbf{u}_+^q \right\} \quad (62)$$

con gli operatori ancora applicati alle singole componenti degli argomenti, il criterio di funzionalità si semplifica rispettivamente come segue:

$$(a) \quad \Delta \mathbf{u}_{\max}^- \leq \mathbf{U}_p \mathbf{H} \mathbf{p} \leq \Delta \mathbf{u}_{\min}^+ \quad (63)$$

$$(b) \quad \Delta \mathbf{u}_{\max}^- \leq \mathbf{U}_p \mathbf{p} \leq \Delta \mathbf{u}_{\min}^+ \quad (64)$$

relazioni che in questo caso definiscono  $(6 \times I)$  restrizioni lineari nel vettore incognito  $\mathbf{p}$ .

#### 5.4. Limiti sulla forza di precompressione e sul tracciato dei cavi

Il valore delle forze di precompressione e delle quote dei cavi deve rispettare dei limiti fisici esprimibili in generale nella forma:

$$\mathbf{p}_0^- \leq \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{p}_0^+ \quad (65)$$

$$\mathbf{Y}^- \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{Y}^+ \quad (66)$$

in cui si sono introdotti i valori limite rispettivamente inferiore e superiore  $\mathbf{p}_0^-$  e  $\mathbf{p}_0^+$  per il vettore  $\mathbf{p}_0$  delle forze di precompressione e  $\mathbf{Y}^-$  e  $\mathbf{Y}^+$  per la matrice  $\mathbf{Y}$  delle quote dei cavi che, in vista degli sviluppi successivi, è stata assemblata nella forma seguente:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{y}_{M_p} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_m = \begin{bmatrix} Y_{m1} \\ Y_{m2} \\ \dots \\ Y_{mN_m} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Post-moltiplicando infatti ambo i membri per il vettore  $\mathbf{p}_0$  :

$$\mathbf{Y}^- \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{Y} \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{Y}^+ \mathbf{p}_0 \quad (68)$$

il sistema di disequaglianze si può riscrivere nella forma:

$$\mathbf{Y}^- \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{L} \mathbf{p}_1 \leq \mathbf{Y}^+ \mathbf{p}_0 \quad (69)$$

avendo posto:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{L}_{M_p} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_m = L_m \mathbf{I}_{N_m} \quad (70)$$

I limiti sulle forze di precompressione e sulle quote dei cavi si esprimono quindi mediante  $2 \times (N + M_p)$  disequaglianze nelle sole incognite  $\mathbf{p}$ .

Il tracciato dei cavi deve comunque essere tale da rispettare dei limiti fisici anche sui valori di curvatura, che si traducono peraltro in ulteriori limiti sul valore delle quote  $\mathbf{Y}$ . Ricordando la seguente relazione di tipo geometrico:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{[1 + \vartheta^2]^3}} \frac{d\vartheta}{ds} \cong \frac{d\vartheta}{ds} \cong \frac{d\vartheta}{dx'} = \frac{1}{L} \frac{d\vartheta}{d\xi} \quad (71)$$

la curvatura in corrispondenza della generica sezione  $n = 2, 3, \dots, (N_m - 1)$  dell'elemento  $m$  può approssimarsi nella forma:

$$\kappa_{mn} \cong \frac{2\Delta\vartheta_{mn}}{L_m [\Delta\xi_{m(n-1)} + \Delta\xi_{mn}]} \quad (72)$$

Indicando con  $\kappa_{mn}^-$  e  $\kappa_{mn}^+$  i valori limite della curvatura in tale sezione e posto:

$$\Delta\vartheta_{mn}^- \cong \kappa_{mn}^- L_m \frac{\Delta\xi_{m(n-1)} + \Delta\xi_{mn}}{2} \quad \Delta\vartheta_{mn}^+ \cong \kappa_{mn}^+ L_m \frac{\Delta\xi_{m(n-1)} + \Delta\xi_{mn}}{2} \quad (73)$$

la condizione limite:

$$\kappa_{mn}^- \leq \kappa_{mn} \leq \kappa_{mn}^+ \quad (74)$$

può equivalentemente esprimersi con riferimento alle deviazioni angolari:

$$\Delta\vartheta_{mn}^- \leq \Delta\vartheta_{mn} \leq \Delta\vartheta_{mn}^+ \quad (75)$$

essendo:

$$\Delta\vartheta_{mn} \cong \frac{\Delta\Psi_{mn}}{\Delta\xi_{mn}} - \frac{\Delta\Psi_{m(n-1)}}{\Delta\xi_{m(n-1)}} = \frac{1}{\Delta\xi_{m(n-1)}} \Psi_{m(n-1)} - \frac{\xi_{m(n+1)} - \xi_{m(n-1)}}{\Delta\xi_{m(n-1)} \Delta\xi_{mn}} \Psi_{mn} + \frac{1}{\Delta\xi_{mn}} \Psi_{m(n+1)} \quad (76)$$

Assemblando sull'intera struttura si ottiene quindi:

$$\Delta\mathbf{Q}^- \leq \mathbf{X}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{Y} \leq \Delta\mathbf{Q}^+ \quad (77)$$

avendo posto:

$$\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{X}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta\mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Delta\mathbf{q}_{M_p} \end{bmatrix} \quad \Delta\mathbf{q}_m = \begin{bmatrix} \Delta\mathcal{G}_{m2} \\ \Delta\mathcal{G}_{m3} \\ \dots \\ \Delta\mathcal{G}_{m(N_m-1)} \end{bmatrix} \quad (78.a)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X}_{M_p} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{m2}^T \\ \mathbf{x}_{m3}^T \\ \dots \\ \mathbf{x}_{m(N_m-1)}^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{mn} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-2)} \\ \bar{\mathbf{x}}_{mn} \\ \mathbf{0}_{(N_m-1-n)} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{x}}_{mn} = \begin{bmatrix} 1/\Delta\xi_{m(n-1)} \\ \xi_{m(n-1)} - \xi_{m(n+1)} \\ \Delta\xi_{m(n-1)}\Delta\xi_{mn} \\ 1/\Delta\xi_{mn} \end{bmatrix} \quad (78.b)$$

ed essendo  $\Delta\mathbf{Q}^-$  e  $\Delta\mathbf{Q}^+$  le matrici dei valori limite per le curvature dei cavi definite dalla matrice  $\Delta\mathbf{Q}$ . Post-moltiplicando ancora ambo i membri per il vettore  $\mathbf{p}_0$ :

$$\Delta\mathbf{Q}^- \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{X}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{p}_0 \leq \Delta\mathbf{Q}^+ \mathbf{p}_0 \quad (79)$$

anche questo sistema di  $2 \times (N - 2 \times M_p)$  disequazioni può risciversi in funzione delle sole incognite  $\mathbf{p}$  del problema:

$$\Delta\mathbf{Q}^- \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{X}\mathbf{p}_1 \leq \Delta\mathbf{Q}^+ \mathbf{p}_0 \quad (80)$$

## 5.5. Vincoli di continuità strutturale e simmetria

Come già accennato, talvolta può essere utile aumentare la discretizzazione degli elementi presollecati, ad esempio per simulare perdite per rientro dei cavi agli ancoraggi o modellare cavi tesati da entrambi gli estremi mediante l'introduzione di una discontinuità in corrispondenza della sezione in cui si inverte la resistenza d'attrito. Questo modo di operare implica però una violazione della continuità strutturale del cavo che deve essere pertanto ripristinata.

A tale scopo si consideri una discontinuità  $w = 1, 2, \dots, W$  fra la sezione  $n_{w1}$  dell'elemento  $m_{w1} \leq M_p$  e la sezione  $n_{w2}$  dell'elemento  $m_{w2} \leq M_p$ . La continuità del cavo richiede che in corrispondenza di tali sezioni i valori della forza di precompressione e della sua eccentricità rispetto all'asse baricentrico siano gli stessi:

$$\alpha_{m_{w1}n_{w1}} P_{0m_{w1}} = \alpha_{m_{w2}n_{w2}} P_{0m_{w2}} \quad (81.a)$$

$$Y_{m_{w1}n_{w1}} - Y_{Gm_{w1}} = Y_{m_{w2}n_{w2}} - Y_{Gm_{w2}} \quad (81.b)$$

In particolare, il vincolo sulle quote dei cavi può essere espresso in funzione delle incognite del problema moltiplicando ambo i membri per la corrispondente forza di precompressione:

$$\alpha_{m_{w1}n_{w1}} P_{0m_{w1}} (Y_{m_{w1}n_{w1}} - Y_{Gm_{w1}}) = \alpha_{m_{w2}n_{w2}} P_{0m_{w2}} (Y_{m_{w2}n_{w2}} - Y_{Gm_{w2}}) \quad (82)$$

e quindi:

$$\alpha_{m_{w1}n_{w1}} Y_{Gm_{w1}} P_{0m_{w1}} - \alpha_{m_{w1}n_{w1}} L_{m_{w1}} P_{1m_{w1}n_{w1}} = \alpha_{m_{w2}n_{w2}} Y_{Gm_{w2}} P_{0m_{w2}} - \alpha_{m_{w2}n_{w2}} L_{m_{w2}} P_{1m_{w2}n_{w2}} \quad (83)$$

Assemblando su tutte le discontinuità si ha così:

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_0 = \mathbf{0} \quad \mathbf{E}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (84)$$

avendo posto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & \dots & a_{M_p 1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \dots & a_{M_p 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1W} & a_{2W} & \dots & \dots & a_{M_p W} \end{bmatrix} \quad a_{mw} = \begin{cases} (-1)^k \alpha_{m_{wk}} & \text{per } m = m_{wk} \quad (k=1,2) \\ 0 & \text{per } m \neq m_{wk} \quad (k=1,2) \end{cases} \quad (85.a)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}_0 \quad \mathbf{E}_1] \quad (85.b)$$

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} e_{11}^0 & e_{21}^0 & \dots & \dots & e_{M_p 1}^0 \\ e_{12}^0 & e_{22}^0 & \dots & \dots & e_{M_p 2}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{1W}^0 & e_{2W}^0 & \dots & \dots & e_{M_p W}^0 \end{bmatrix} \quad e_{mw}^0 = \begin{cases} (-1)^k \alpha_{m_{wk}} Y_{Gm} & \text{per } m = m_{wk} \quad (k=1,2) \\ 0 & \text{per } m \neq m_{wk} \quad (k=1,2) \end{cases} \quad (85.c)$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} e_{11}^1 & e_{21}^1 & \dots & \dots & e_{N1}^1 \\ e_{12}^1 & e_{22}^1 & \dots & \dots & e_{N2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{1W}^1 & e_{2W}^1 & \dots & \dots & e_{NW}^1 \end{bmatrix} \quad e_{nw}^1 = \begin{cases} (-1)^{k+1} \alpha_{m_{wk}n} L_{m_{wk}} & \text{per } n = n_{wk} \quad (k=1,2) \\ 0 & \text{per } n \neq n_{wk} \quad (k=1,2) \end{cases} \quad (85.d)$$

che costituiscono un sistema di  $(2 \times W)$  equazioni nelle incognite  $\mathbf{p}$ .

Naturalmente l'imposizione della continuità fra due sezioni di un elemento si riflette anche nella definizione dei relativi limiti fisici sul tracciato di precompressione. In particolare i limiti sulle quote dei cavi, dovendo questi avere la stessa eccentricità, è sufficiente che siano esplicitati solo per una delle due sezioni facendo riferimento ai valori limite più restrittivi. In questo modo il numero delle disequazioni si riduce di  $(2 \times W)$ . Si osservi comunque che per ogni vincolo di continuità devono in generale essere introdotti ulteriori  $(2 \times W)$  limiti sul valore delle curvature, per cui le dimensioni del problema si mantengono nel complesso

invariate. La definizione delle nuove disequaglianze sia sulle quote, sia sulle curvature, segue quindi la procedura già vista, se non per il fatto che l'origine del riferimento  $Y$  e il tiro  $P_0$  sono in generale diversi nelle sezioni vincolate. Nel seguito, pur mantenendo per semplicità la stessa notazione, si assumerà che le corrispondenti relazioni matriciali tengano conto di tali modifiche.

Per concludere si osserva che il particolare problema che si deve esaminare può richiedere ulteriori vincoli nelle variabili  $\mathbf{p}$ , come ad esempio avviene in presenza di simmetrie strutturali. Anche in questi casi ci si può generalmente ricondurre a delle relazioni lineari in  $\mathbf{p}$  e quindi esprimibili mediante un sistema di  $Z$  restrizioni nella forma:

$$\mathbf{Z}\mathbf{p} = \mathbf{z}_0 \quad (86)$$

### 5.6. Scelta della funzione obiettivo e soluzione del problema

Il costo della soluzione strutturale associata ad un particolare sistema di precompressione può ragionevolmente assumersi come una funzione del vettore incognito  $\mathbf{p}$  che lo definisce o, più semplicemente, della sua partizione  $\mathbf{p}_0$  associata al tiro dei cavi. In particolare, con riferimento ad una funzione obiettivo lineare in  $\mathbf{p}_0$ , il problema strutturale di ricerca della precompressione ottimale si traduce nel seguente problema matematico di programmazione lineare:

$$\min \left\{ \mathbf{c}^T \mathbf{p}_0 \left| \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{T}}_p \mathbf{p} \leq \Delta \tilde{\mathbf{t}} \\ \Delta \tilde{\mathbf{u}}^- \leq \tilde{\mathbf{U}}_p \mathbf{p} \leq \Delta \tilde{\mathbf{u}}^+ \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_0^- \leq \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{p}_0^+ \\ \mathbf{Y}^- \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{L} \mathbf{p}_1 \leq \mathbf{Y}^+ \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{Q}^- \mathbf{p}_0 \leq \mathbf{X} \mathbf{p}_1 \leq \Delta \mathbf{Q}^+ \mathbf{p}_0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \mathbf{p}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ \mathbf{Z} \mathbf{p} = \mathbf{z}_0 \end{array} \right. \right\} \quad (87)$$

avente  $V = (N + M_p)$  variabili e  $R \leq [Q \times (6 \times I + J) + 2 \times (2 \times N - M_p) + 2 \times W + Z]$  restrizioni.

In particolare le componenti del vettore  $\mathbf{c}$  rappresentano il costo *relativo* di ciascuna componente di precompressione e dipendono dal particolare problema che si esamina. Ad esempio, se il costo strutturale è associato principalmente al sistema tecnologico di tesatura, può essere opportuno assumere lo stesso valore per tutte le componenti ( $c_m = 1$ ), mentre nel caso in cui il costo strutturale risulti determinato principalmente dai quantitativi di acciaio, ciascuna componente può assumersi proporzionale alla lunghezza del cavo corrispondente e quindi, in prima approssimazione, alla lunghezza dell'elemento presolleccitato ( $c_m = L_m$ ). Si ricorda infine che il grande vantaggio di una tale impostazione è legato sia alla convessità del problema matematico, ovvero all'assenza di punti di minimo locale, sia all'efficienza degli algoritmi risolutivi, che conducono alla soluzione esatta in un numero finito di iterazioni (Appendice II).

## 6. APPLICAZIONI

Nel seguito si mostrano due applicazioni del procedimento esposto, riguardanti una travata da ponte continua (Kirsch, 1973a) ed un telaio di un edificio industriale.

### 6.1. Ponte a travata continua (Kirsch, 1973a)

Si considera la travata da ponte continua a sezione trasversale uniforme mostrata in Fig. 7 e soggetta alle 4 condizioni di carico riportate in Fig. 9. Nell'ipotesi di continuità del cavo risultante e pensando di effettuare la tesatura da entrambi gli estremi, per le perdite istantanee dovute al rientro dei cavi agli ancoraggi ed all'attrito lungo la travata si assume l'andamento in Fig. 8. Delle perdite differite si tiene invece conto riducendo il tiro residuo mediante un fattore  $\eta^q = 0.8$ , con  $q = 1,2,3,4$ . Nell'ambito dei criteri finora esposti, si vuole ottimizzare il tiro ed il tracciato del cavo nel rispetto di limiti sulla sua posizione e sulle tensioni normali:

$$\begin{cases} 120 \leq Y(x) \leq 880 \text{ mm} \\ Y(x) = Y(-x) \\ Y(-l/2) = Y_G = 559 \text{ mm} \end{cases} \quad \begin{cases} -16 \leq \sigma^q(x, Y) \leq 2 \text{ MPa} & \text{per } q = 1 \\ -13 \leq \sigma^q(x, Y) \leq 1.5 \text{ MPa} & \text{per } q = 2,3,4 \end{cases}$$

mentre non vengono poste restrizioni sulle tensioni tangenziali e sugli spostamenti. Assumendo  $\Phi_y \approx 0$ , la soluzione del problema risulta pertanto indipendente dalla deformabilità del materiale.

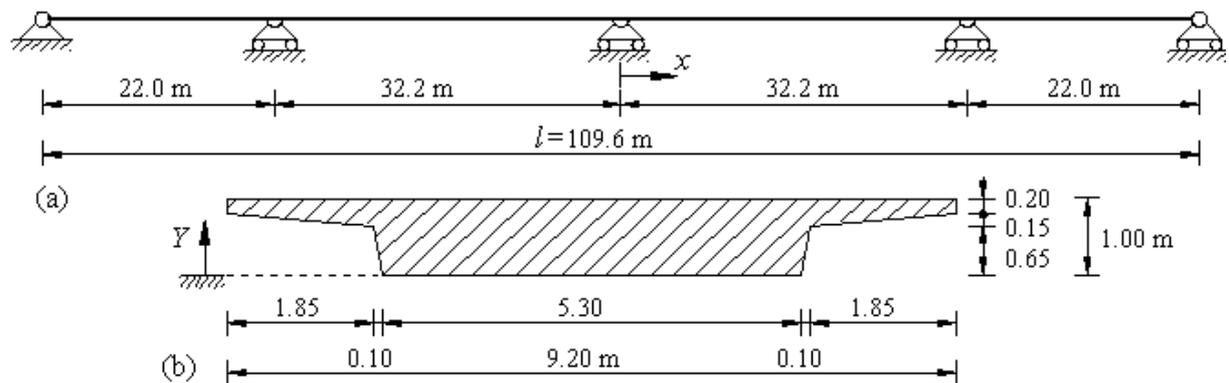


Fig. 7 -Ponte a travata continua: (a) schema statico; (b) sezione trasversale.

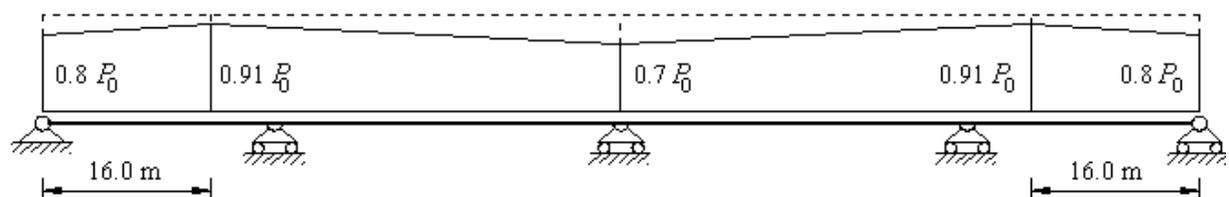


Fig. 8 - Perdite istantanee dovute al rientro dei cavi agli ancoraggi ed all'attrito.

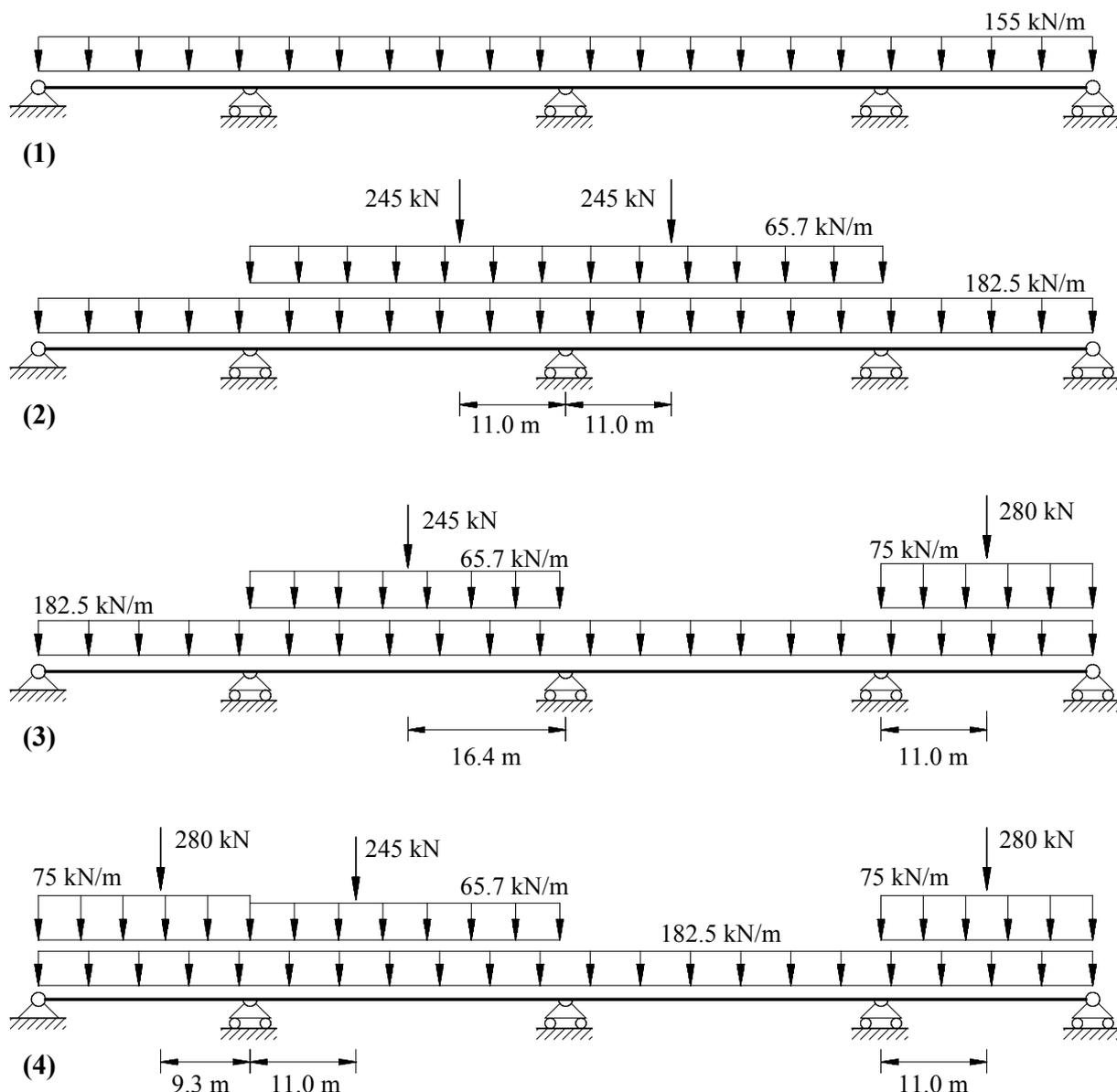


Fig. 9 - Condizioni di carico.

Il problema così formulato è stato studiato in letteratura (Kirsch, 1973a) assumendo come variabili di progetto il tiro  $P_0$  e le quote  $Y$  del cavo in 41 sezioni scelte con passo  $\Delta x = 2.750$  m nelle campate laterali e  $\Delta x = 2.733$  m nelle campate centrali e controllando lo stato tensionale ai lembi inferiore e superiore delle stesse sezioni. L'azione della precompressione è stata simulata mediante un sistema di forze concentrate nelle sezioni di progetto e trascurando le tensioni distribuite lungo il cavo. Con tale modello sono state ottenute le due soluzioni descritte in Fig. 10 ed in Tab. 1.a, ciascuna associata a differenti restrizioni sulla curvatura locale del cavo  $k = \Delta \vartheta / \Delta x$ : (I)  $|k(x)| \leq 0.1 \text{ m}^{-1}$ ; (II)  $-0.1 \leq k(x) \leq 0 \text{ m}^{-1}$  per un tratto di lunghezza  $4\Delta x$  in corrispondenza degli appoggi interni e  $0 \leq k(x) \leq 0.1 \text{ m}^{-1}$  altrove.

Lo stesso problema viene ora risolto applicando il procedimento esposto. Per comodità di modellazione la trave viene discretizzata in 16 elementi di lunghezza diversa, ciascuno dei quali suddiviso in conci di lunghezza costante ed approssimante il valore medio  $\Delta x = 2.74$  m. Si tiene conto delle perdite istantanee sia assumendo  $\mu k^* = 7.555 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$  con  $\nu = -x/|x|$  nei tratti terminali dove si ha l'effetto del rientro dei cavi e  $\mu k^* = 5.948 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$  con  $\nu = x/|x|$  altrove, sia adottando un coefficiente riduttivo fittizio per le perdite differite  $\bar{\eta}^q = 0.91 \times \eta^q$ . Le sezioni di controllo si scelgono coincidenti con le sezioni di progetto e le fibre di controllo con i loro lembi inferiore e superiore. In Fig. 11 ed in Tab. 1.b si mostrano i risultati ottenuti considerando limiti sulle deviazioni angolari del cavo senza restrizioni in segno, ma progressivamente più stringenti: (1)  $|\Delta \vartheta| \leq 10^\circ$ ; (2)  $|\Delta \vartheta| \leq 5^\circ$ ; (3)  $|\Delta \vartheta| \leq 5^\circ$  nelle sezioni d'appoggio e  $|\Delta \vartheta| \leq 1^\circ$  altrove. In Fig. 12 ed in Tab. 2 si confronta infine il regime tensionale che si ha in assenza di precompressione con quello associato alla soluzione ottenuta nel caso (3).

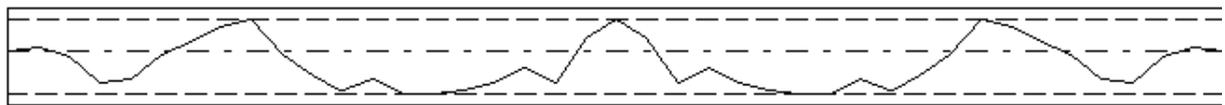
x [m]	Y [mm]	
	(I)	(II)
±54.800	560	560
±52.050	597	487
±49.30	495	414
±46.550	230	340
±43.800	264	267
±41.050	518	460
±38.300	649	654
±35.550	802	751
±32.800	880	848
±30.067	523	587
±27.333	301	325
±24.600	138	272
±21.867	268	221
±19.133	120	170
±16.400	120	120
±13.667	148	147
±10.933	232	201
±8.200	373	254
±5.467	275	307
±2.733	680	730
0.000	880	880
$P_0$ [kN]	52840	52840

(a)

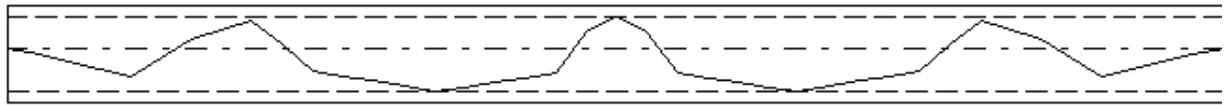
x [m]	Y [mm]		
	(1)	(2)	(3)
±54.800	559	559	559
±52.050	597	269	454
±49.300	496	219	398
±46.550	230	388	389
±43.800	279	317	428
±42.100	327	334	482
±38.800	456	655	644
±35.800	609	846	788
±32.800	880	880	880
±30.050	850	672	723
±27.300	597	568	519
±24.550	453	224	347
±21.800	120	120	222
±19.100	120	120	148
±16.400	120	120	120
±13.700	120	120	139
±11.000	120	125	206
±8.250	347	142	322
±5.500	367	400	486
±2.750	520	760	654
0.000	880	880	775
$P_0$ [kN]	51886	51886	66747

(b)

Tab. 1 - Soluzioni ottimali ottenute (a) in letteratura (Kirsch, 1973a) e (b) con la procedura esposta.



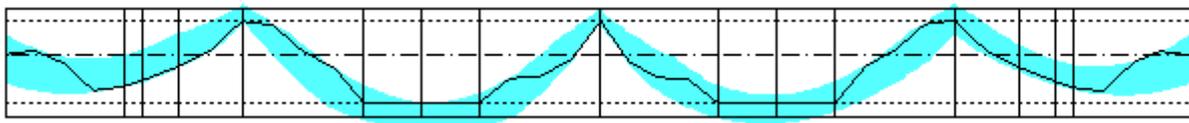
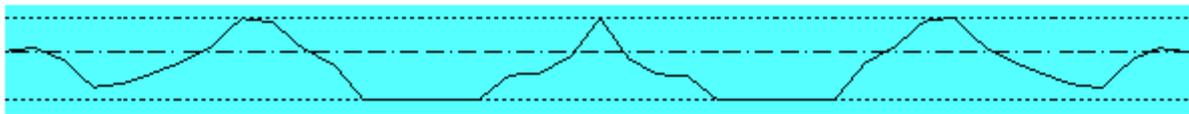
(a)



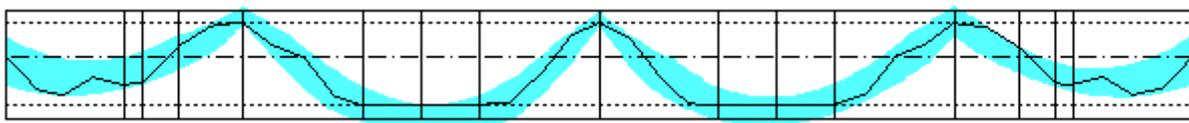
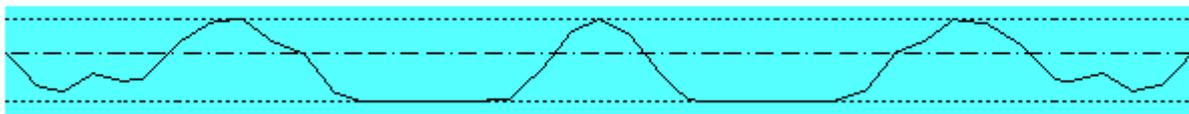
(b)

Fig. 10 - Soluzione ottimale ottenuta in letteratura (Kirsch, 1978a; scala grafica  $Y/x = 10$ ):

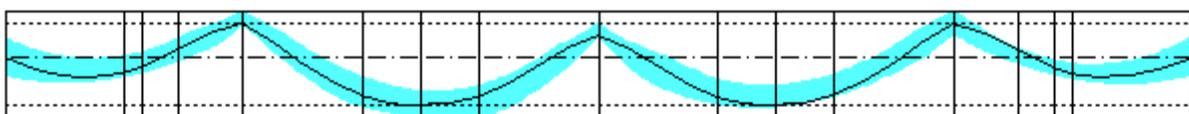
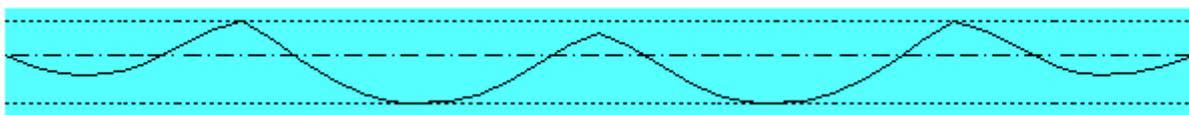
(a) caso (I),  $P_0 = 52840$  kN; (b) caso (II),  $P_0 = 52840$  kN.



(a)



(b)



(c)

Fig. 11 - Soluzione ottimale con fuso ammissibile del cavo ottenuta con la procedura esposta

(scala grafica  $Y/x = 10$ ): (a) caso (1),  $P_0 = 51886$  kN; (b) caso (2),  $P_0 = 51886$  kN;

(c) caso (3),  $P_0 = 66747$  kN.

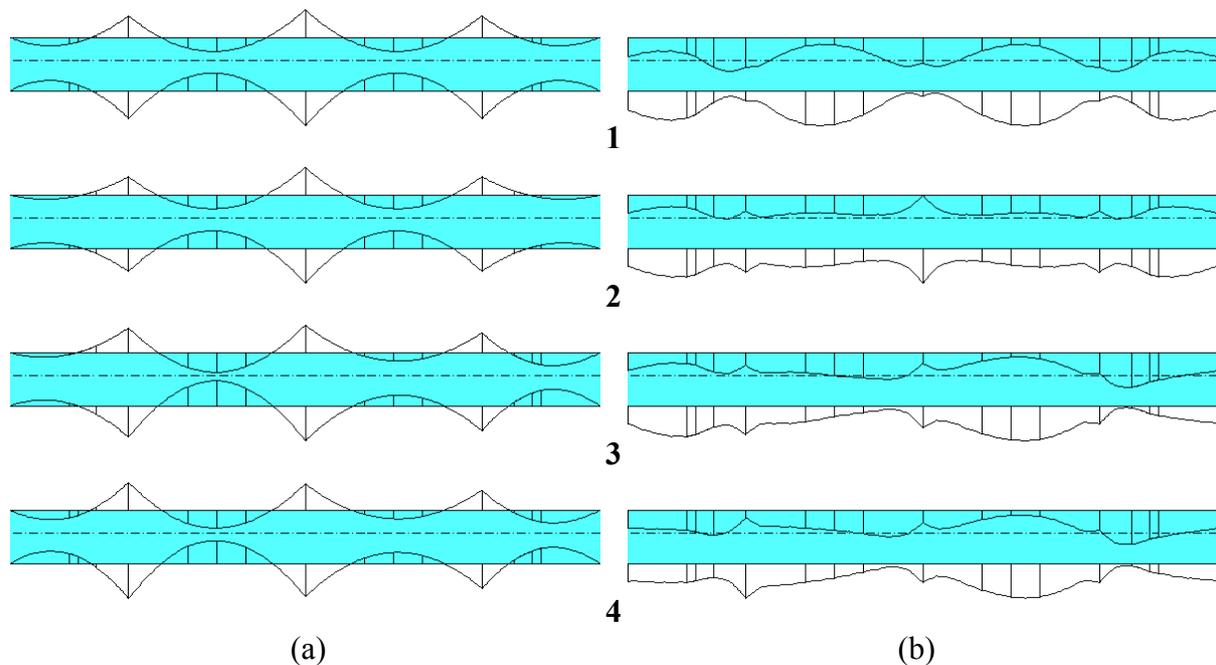


Fig. 12 - Andamento delle tensioni normali in corrispondenza delle fibre esterne (Tab. 2):  
 (a) senza precompressione; (b) con la precompressione ottimale ottenuta nel caso (3).

$q$	$P_0 = 0$		$P_0 = 66747 \text{ kN}$	
	$\sigma_{\min} \text{ [MPa]}$	$\sigma_{\max} \text{ [MPa]}$	$\sigma_{\min} \text{ [MPa]}$	$\sigma_{\max} \text{ [MPa]}$
1	-14.74	11.63	-12.11	-0.64
2	-25.85	20.39	-13.00	-0.10
3	-20.91	16.50	-13.00	-0.71
4	-21.13	16.67	-13.00	-0.91

Tab. 2 - Valori estremi delle tensioni normali nel caso (3).

## 6.2. Edificio industriale

Si esamina la struttura a telaio schematizzata in Fig. 13, composta da elementi a sezione trasversale uniforme aventi le caratteristiche geometriche elencate in Tab. 3. Posto  $\Phi_{y'} \approx 0$ , la deformabilità del materiale risulta definita unicamente dal modulo di Young, per il quale si assume il valore iniziale  $E = 40000 \text{ MPa}$  per tutti gli elementi. Con riferimento alla distribuzione dei carichi in Fig. 14, si considerano le 5 condizioni di carico definite in Tab. 5. Si fa l'ipotesi di precomprimere solo una parte della struttura ed in particolare i pilastri laterali, le travi laterali a parete piena, le aste diagonali e il corrente inferiore della travatura reticolare. Le perdite istantanee e differite vengono valutate con i coefficienti rispettivamente in Tab. 4 e 5. In particolare si assumono gli stessi coefficienti  $\eta^q$  e  $\delta^q$  per tutti gli elementi.

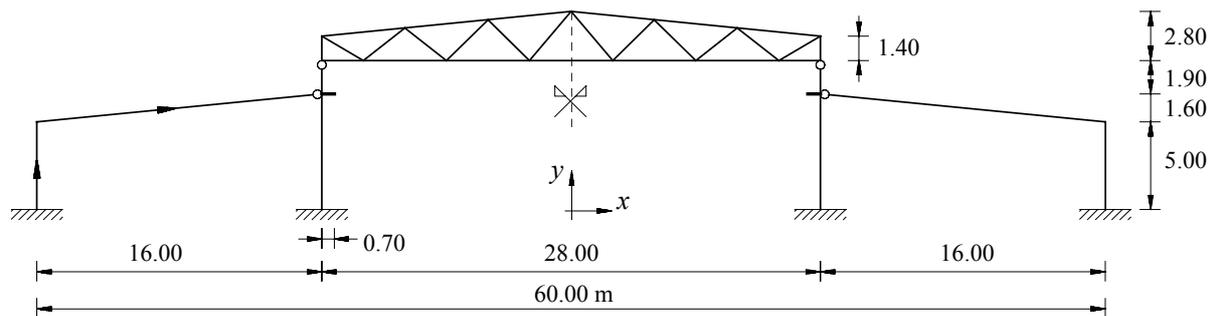


Fig. 13 - Telaio di un edificio industriale: schema statico.

Elemento Strutturale	$h = 2Y_G$ [mm]	$A$ [mm <sup>2</sup> ]	$J_z \times 10^9$ [mm <sup>4</sup> ]	$S_{zG} \times 10^6$ [mm <sup>3</sup> ]	$b(0) = b(h)$ [mm]	$b(Y_G)$ [mm]
Pilastri laterali	500	200000	4.167	12.500	400	400
Travi laterali	800	130000	10.508	17.125	300	80
Pilastri centrali	800	400000	21.333	40.000	500	500
Corrente superiore T.R.	350	105000	1.072	4.594	300	300
Aste di parete T.R.	300	90000	0.675	3.375	300	300
Corrente inferiore T.R.	250	75000	0.391	2.344	300	300

Tab. 3 - Caratteristiche geometriche delle sezioni trasversali.

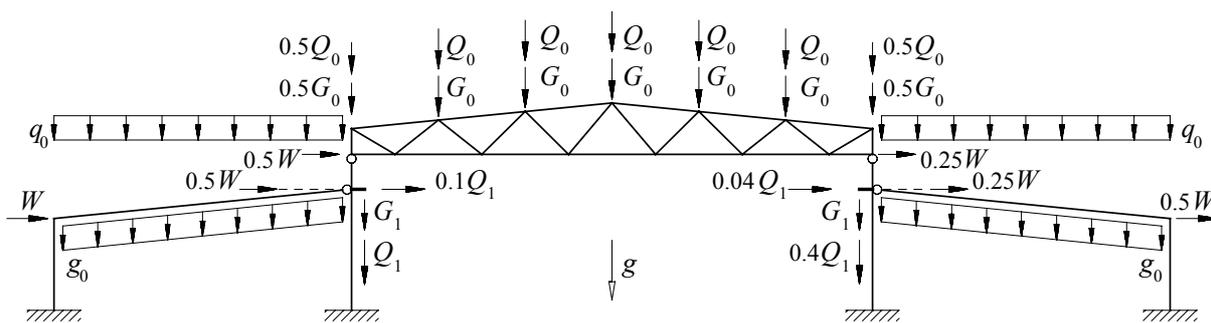


Fig. 14 - Distribuzione dei carichi associata alle condizioni di carico descritte in Tab. 4.

Elemento Precompresso	$\mu k^*$ [m <sup>-1</sup> ]	$U$ [-]	$Y^-$ [mm]	$Y^+$ [mm]	$\Delta\vartheta^-$ [°]	$\Delta\vartheta^+$ [°]
Pilastri laterali	0.01	$-x/ x $	50	750	-	-
Travi laterali	0.01	$x/ x $	50	750	-5	5
Aste diagonali T.R.	0	-	150	150	-	-
Corrente inferiore T.R.	0	-	125	125	-	-

Tab. 4 - Perdite istantanee e limiti sul tracciato dei cavi.

	$\gamma = \rho g$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$g_0$ [kN/m]	$G_0$ [kN]	$G_1$ [kN]	$q_0$ [kN/m]	$Q_0$ [kN]	$Q_1$ [kN]	$W$ [kN]	$\eta^q$ [-]	$\delta^q$ [-]	$\bar{s}_x^q$ [mm]	$\bar{s}_y^q$ [mm]	$\bar{\sigma}_c^q$ [MPa]
1	25	0	0	0	0	0	0	0	1.0	1.0	10	20	20
2	25	5	20	50	0	0	0	0	1.0	1.0	10	20	20
3	25	5	20	50	0	0	200	0	0.8	0.5	10	20	16
4	25	5	20	50	10	45	200	0	0.8	0.5	10	20	16
5	25	5	20	50	0	0	200	30	0.8	0.5	10	20	16

Tab. 5 - Condizioni di carico, perdite differite, limiti sugli spostamenti e sulle tensioni.

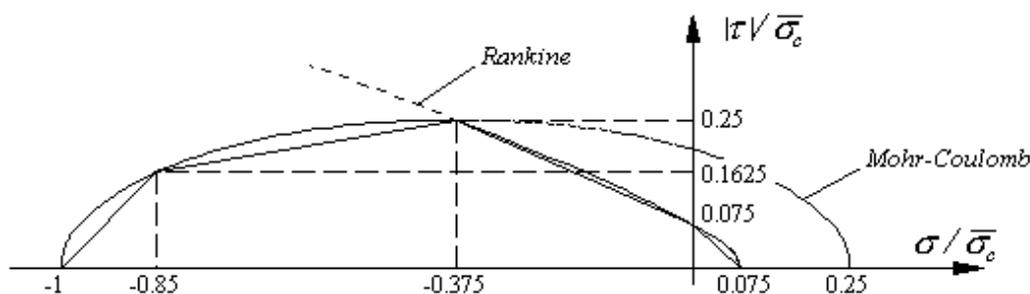


Fig. 15 - Linearizzazione del criterio di resistenza di Mohr-Coulomb modificato (Rankine).

Il sistema di precompressione si considera vincolato al rispetto della simmetria geometrica e dei limiti sul tracciato dei cavi definiti in Tab. 4, con l'ulteriore restrizione  $Y = Y_G$  alle estremità incernierate delle travi laterali. Per la definizione dei limiti tensionali si fa riferimento al criterio di rottura di Mohr-Coulomb associato ad una coesione  $c = 0.25\bar{\sigma}_c$  e ad un angolo d'attrito  $\phi = \arctg 0.75$ , con  $\bar{\sigma}_c$  che assume i valori elencati in Tab. 5. Tale criterio viene modificato limitando a  $0.075\bar{\sigma}_c$  il valore della massima tensione principale (*tension cutoff* tipo Rankine), ottenendo la curva di rottura descritta in Fig. 15. Ai fini dell'applicazione, a tale curva si sostituisce la spezzata con 8 lati riportata nella stessa Fig. 15. Si introducono infine i limiti sugli spostamenti nel sistema di riferimento globale  $|s_x^q| \leq \bar{s}_x^q$  e  $|s_y^q| \leq \bar{s}_y^q$ , con  $\bar{s}_x^q$  e  $\bar{s}_y^q$  che assumono i valori in Tab. 5.

Il problema di ottimizzazione si imposta considerando un unico concio per i pilastri e le aste della trave reticolare e suddividendo le travi laterali in 8 concii della stessa lunghezza. Le sezioni di controllo si assumono coincidenti con quelle di progetto ed in tali sezioni si scelgono inoltre tre fibre di controllo alle quote  $Y = 0$ ,  $Y = Y_G$  e  $Y = h$ , misurate rispetto al lembo inferiore. La soluzione ottimale ottenuta assumendo lo stesso costo relativo per tutte le componenti di precompressione ( $c_m = 1$ ) è descritta in Fig. 16 ed in Tab. 6. Infine, nelle Figg. 17 e 18 si confrontano le configurazioni deformate e le distribuzioni tensionali che si hanno in assenza di precompressione con quelle associate alla soluzione ottimale.

Tiro Ottimale	Pilastro laterale	Trave Laterale	Trave reticolare									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_0$ [kN]	1366	598	0	701	957	868	431	0	122	0	1026	0
Tracciato	Pilastro laterale		Trave laterale									
	$x'$ [mm]	0	5000	0	2010	4020	6030	8040	10050	12060	14070	16080
	$Y$ [mm]	182	342	698	552	405	259	112	50	111	172	400

Tab. 6 - Sistema di precompressione ottimale.

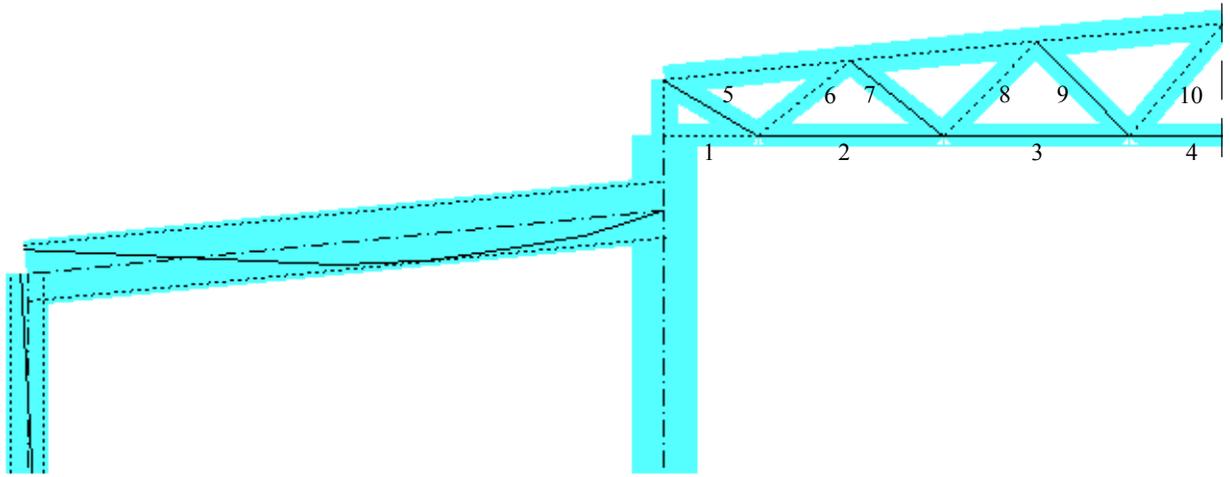


Fig. 16 - Tracciato ottimale dei cavi (scala grafica  $Y/x' = 2$ ).

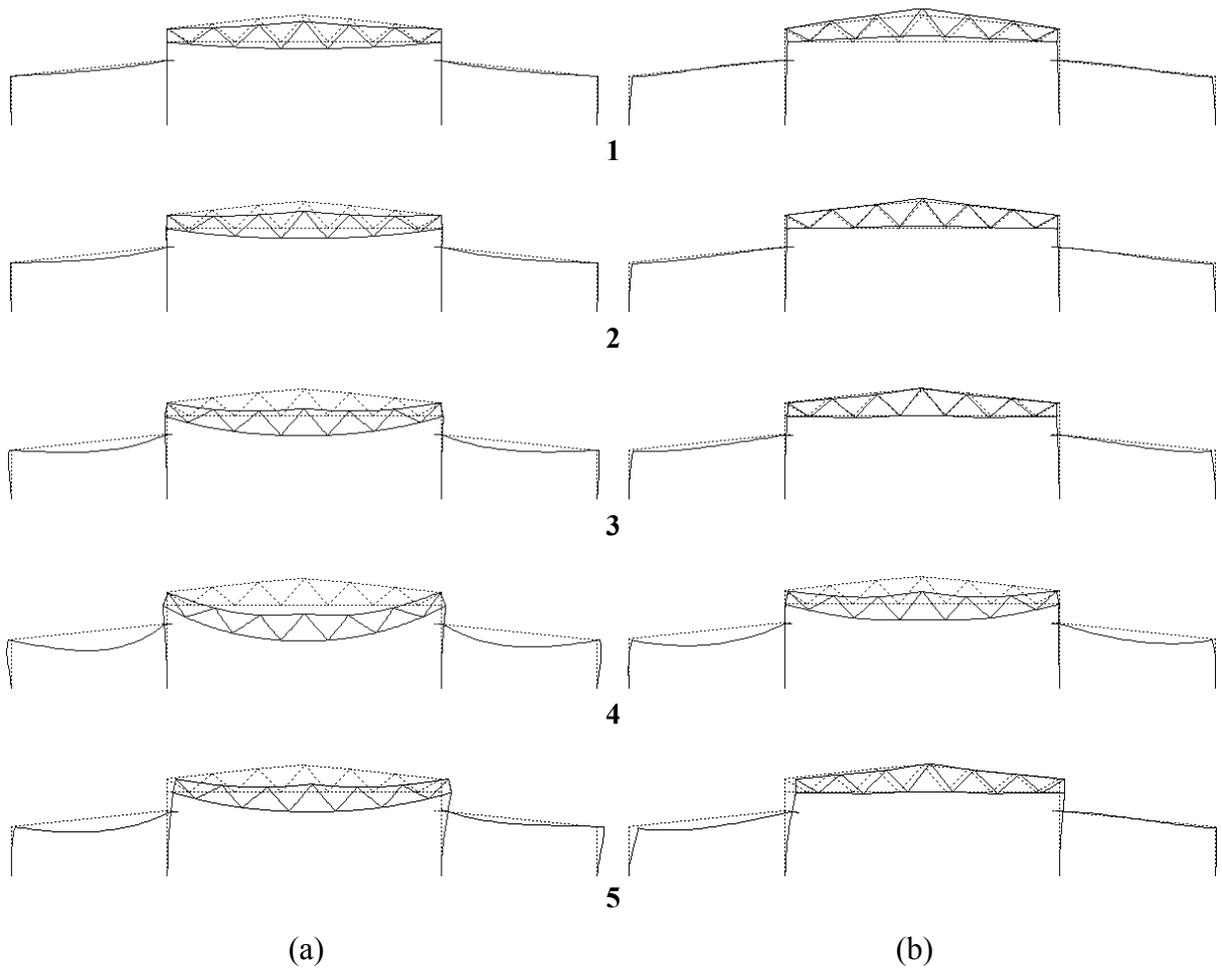


Fig. 17 - Configurazione deformata (fattore di amplificazione degli spostamenti  $u_{amp}/u = 100$ ):  
 (a) in assenza di precompressione; (b) con la precompressione ottimale.

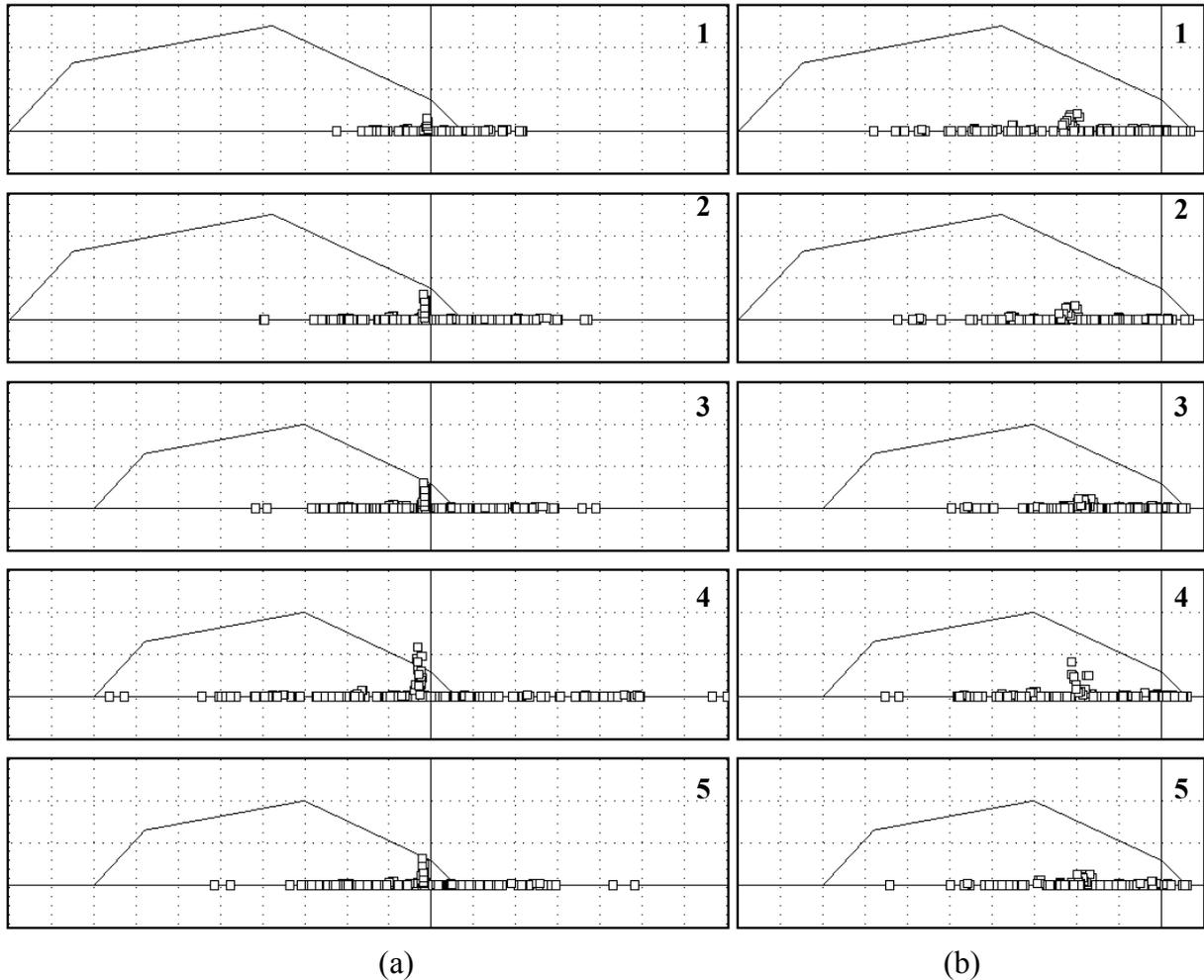


Fig. 18 - Distribuzione dei punti rappresentativi lo stato tensionale ( $\sigma, \tau$ ) nelle fibre di controllo: (a) in assenza di precompressione; (b) con la precompressione ottimale.

## 7. CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

In questo lavoro si è esaminato il problema dell'ottimizzazione della forza di precompressione e del tracciato dei cavi in elementi strutturali di geometria assegnata, in generale non prismatici e soggetti a condizioni di carico multiple, con specifico riferimento al caso delle strutture a telaio con tracciato dei cavi avente conformazione qualunque. In particolare, il problema strutturale è stato formulato con riferimento ad un modello di comportamento di tipo elastico lineare e ricondotto ad un problema matematico di programmazione lineare. Relativamente alle potenzialità della formulazione proposta, illustrate con due applicazioni, si osserva quanto segue.

- Discretizzata la struttura e definite le condizioni al contorno, il sistema di precompressione ottimale viene individuato in modo *diretto* e *sistematico*. La procedura di ricerca non richiede quindi alcuna interazione da parte dell'utente e può essere agevolmente applicata a strutture di complessità diversa, indipendentemente dal loro grado di iperstaticità.

- Nell'ambito delle approssimazioni introdotte, l'approccio seguito permette di considerare anche il caso della precompressione a cavi esterni.
- La convessità del problema di ottimizzazione esclude la presenza di punti di estremo locale. L'algoritmo risolutivo risulta inoltre estremamente robusto, conducendo ad una soluzione esatta in un numero finito di iterazioni.
- Il riferimento a variabili di progetto ausiliarie dimensionalmente congruenti, consente di evitare nel processo di soluzione problemi di tipo numerico legati alla presenza di grandezze incognite di natura diversa.
- Il modello elastico lineare può considerarsi valido limitatamente alla fase di esercizio. È inteso che una volta definito il sistema di precompressione, occorre verificare le prestazioni strutturali nei riguardi degli stati limite ultimi, con riferimento al comportamento non lineare dei materiali.

## **RINGRAZIAMENTI**

Si desidera ringraziare il Prof. Pier Giorgio Malerba ed il Prof. Franco Bontempi per i preziosi consigli ed il continuo incoraggiamento.

## **APPENDICE I - BIBLIOGRAFIA**

- Bengtsson Å., Wolf J.P. (1973): Optimum Integer Number and Position of Several Groups of Prestressing Tendons for Given Concrete Dimensions, *Computers & Structures*, **3**, pp. 827-848.
- Biondini F. (1998): Optimal Prestressing in Steel Framed Structures, *Proceedings of Fifth Pacific Structural Steel Conference (PSSC'98)*, October 13-16, Seoul, Korea.
- Birkeland H.W. (1974): How to Design Prestressed Concrete Beams of Minimum Cross Section, *ACI Journal*, **71**(12), pp. 634-641.
- Bontempi F., Biondini F., Malerba P.G. (1998): Thickness Optimization of Plane Prestressed Concrete Elements, in G.P. Steven, O.M. Querin, H. Guan, Y.M. Xie (eds.) *Structural Optimization*, Oxbridge, Sydney, pp. 285-292.
- Burgoyne C.J. (1988a): Cable Design for Continuous Prestressed Concrete Bridges, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, **85**(3), pp. 161-184.
- Burgoyne C.J. (1988b): Automated Determination of Concordant Profiles, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, **85**(6), pp. 333-352.
- Bungey J.H. (1979): Interactive CAD of Prestressed Concrete Using a Mini-computer, *Advances in Engineering Software*, **1**(2), pp. 61-66.

- Cestelli Guidi C. (1987): *Cemento armato precompresso*, Hoepli, Milano.
- Chong E.K.P., Zak S.H. (1996): *An Introduction to Optimization*, John Wiley & Sons, New York (NY).
- Cohn M.Z., MacRae J. (1984): Optimization of Structural Concrete Beams, *ASCE Journal of Structural Engineering*, **110**(7), pp. 1573-1588.
- Cohn M.Z., Lounis Z. (1993): Optimum Limit Design of Continuous Prestressed Concrete Beams, *ASCE Journal of Structural Engineering*, **119**(12), pp. 3551-3570.
- Cope R.J., Bungey J.H. (1976): An Examination of Interactive Computer Usage in Structural Design, with Special Reference to Bridges, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, **61**(9), pp. 525-538.
- Francis R. (1972): Optimal Design of Prestressed Concrete Continuous Beams, *Inelasticity and Non-Linearity in Structural Concrete*, University of Waterloo Press, **8**, pp. 441-470.
- Goble G.G., Lapay W.S. (1971): Optimum Design of Prestressed Beams, *ACI Journal*, **68**(9), pp. 712-718.
- Hadley G. (1962): *Linear Programming*, Addison-Wesley, Reading (MA).
- Han S.H., Adamu A., Karihaloo B.L. (1995): Application of DCOC to Optimum Prestressed Concrete Beam Design, *Engineering Optimization*, **25**, pp. 179-200.
- Han S.H., Adamu A., Karihaloo B.L. (1996a): Minimum Cost Design of Multispan Partially Prestressed Concrete Beams Using DCOC, *Engineering Optimization*, **26**, pp. 35-59.
- Han S.H., Adamu A., Karihaloo B.L. (1996b): Minimum Cost Design of Multispan Partially Prestressed Concrete T-Beams Using DCOC, *Structural Optimization*, **12**, pp. 75-86.
- Johnson F.R. Jr. (1972): An Interactive Design Algorithm for Prestressed Concrete Girders, *Computers & Structures*, **2**, pp. 1075-1088.
- Keyder E. (1990): Friction Losses in Prestressed Steel by Equivalent Load Method, *PCI Journal*, **35**(2), pp. 74-77.
- Kirsch U. (1972): Optimum Design of Prestressed Beams, *Computers & Structures*, **2**, pp. 573-583.
- Kirsch U. (1973a): Optimized Prestressing by Linear Programming, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **7**, pp. 125-136.
- Kirsch U. (1973b): Optimum Design of Prestressed Plates, *ASCE Journal of the Structural Division*, **99**(6), pp. 1075-1090.

- Kirsch U. (1985): A Bounding Procedure for Synthesis of Prestressed Systems, *Computers & Structures*, **20**(5), pp. 885-895.
- Kirsch U. (1993): *Structural Optimization: Fundamentals and Applications*, Springer, Heidelberg.
- Kirsch U. (1997): Two-level Optimization of Prestressed Structures, *Engineering Structures*, **19**(4), pp. 309-317.
- Lin T.Y., Burns N.H. (1982): *Design of Prestressed Concrete Structures*, John Wiley & Sons, New York (NY).
- Livesley R.K. (1975): *Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press, Oxford.
- Lounis Z., Cohn M.Z. (1993): Multiobjective Optimization of Prestressed Concrete Structures, *ASCE Journal of Structural Engineering*, **119**(3), pp. 794-808.
- Magnel G. (1954): *Prestressed Concrete*, McGraw Hill, New York (NY).
- Malerba P.G. (Ed.), (1998): *Analisi limite e non lineare di strutture in calcestruzzo armato*, CISM, Udine.
- Migliacci A. (1991): *Progetti di strutture*, Masson, Milano.
- Morris D. (1978): Prestressed Concrete Design by Linear Programming, *ASCE Journal of the Structural Division*, **104**(3), pp. 439-452.
- Naaman A.E. (1976): Minimum Cost Versus Minimum Weight of Prestressed Slabs, *ASCE Journal of the Structural Division*, **102**(7), pp. 1493-1505.
- Parme A.L., Paris G.H. (1951): Designing for Continuity in Prestressed Concrete Structures, *ACI Journal*, **23**(1), pp. 45-64.
- Przemieniecki J.S. (1968): *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw Hill, New York (NY).
- Roca P., Mari A.R. (1993): Numerical Treatment of Prestressing Tendons in the Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Structures, *Computers & Structures*, **46**(5), pp. 905-916.
- Sawko F. (Ed.), (1978): *Prestressed Concrete Developments*, **2**, Applied Science Publishers, London.
- Tin-Loi F. (1990): On the Optimal Plastic Synthesis of Frames, *Engineering Optimization*, **16**, pp. 91-108.
- Utrilla M.A., Samartin A. (1997): Optimized Design of the Prestress in Continuous Bridge Decks, *Computers & Structures*, **64**(1-4), pp. 719-728.

## APPENDICE II: RICHIAMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Si chiama *programmazione lineare* il problema matematico di ricerca del valore minimo o massimo di una *funzione obiettivo* lineare in tutte le sue variabili soggette a vincoli lineari di eguaglianza o di disequaglianza. La forma delle restrizioni differisce da un problema all'altro, ma ogni *programma lineare* può essere sempre ricondotto alla seguente *forma normale*:

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

con  $\mathbf{A}$  matrice reale di dimensioni  $(m \times n)$ ,  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  vettore reale di dimensione  $m$ ,  $\mathbf{c}$  ed  $\mathbf{x}$  vettori reali di dimensione  $n$ . Un vettore  $\mathbf{x}$  che soddisfa le restrizioni del problema si definisce *vettore ammissibile* e l'insieme di tali vettori costituisce un insieme detto *dominio ammissibile*:

$$D = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

Da un punto di vista geometrico il dominio  $D$  definisce nello spazio euclideo a  $n$  dimensioni un iperpoliedro convesso (*simplexso*) delimitato dagli iperpiani descritti dai vincoli del problema. Si definisce *vettore ammissibile ottimale* un vettore  $\mathbf{x} \in D$  che rende ottimale la funzione obiettivo.

Eliminate eventuali equazioni ridondanti, le  $m$  righe di  $\mathbf{A}$  possono considerarsi linearmente indipendenti. In funzione del numero  $n$  delle colonne di  $\mathbf{A}$ , si distinguono pertanto i casi seguenti:

- (i) se  $m > n$  il sistema non ammette soluzioni: il dominio  $D$  risulta necessariamente vuoto per incompatibilità dei vincoli ed il programma lineare non ammette soluzioni;
- (ii) se  $m = n$  il sistema ammette una sola soluzione:
  - se il vettore soluzione non è ammissibile il dominio  $D$  risulta necessariamente vuoto per incompatibilità dei vincoli ed il programma lineare non ammette soluzioni;
  - se il vettore soluzione è ammissibile allora deve essere anche ottimale: il dominio  $D$  contiene questo unico elemento ed il programma lineare ammette una sola soluzione;
- (iii) se  $m < n$  il sistema ammette  $\infty^{(n-m)}$  soluzioni:
  - se nessuno dei vettori soluzione è ammissibile il dominio  $D$  risulta necessariamente vuoto per incompatibilità dei vincoli ed il programma lineare non ammette soluzioni;
  - se solo uno dei vettori soluzione è ammissibile allora deve essere anche ottimale: il dominio  $D$  contiene questo unico elemento ed il programma lineare ammette una sola soluzione;
  - se  $\infty^p$  dei vettori soluzione sono ammissibili, con  $1 \leq p \leq (n - m)$ , il dominio  $D$  risulta non vuoto ed il programma lineare può avere:
    - nessuna soluzione se la funzione obiettivo non è limitata inferiormente in  $D$ ;
    - una sola soluzione;
    - $\infty^q$  soluzioni, con  $1 \leq q \leq p$ .

Essendo (iii) l'unico caso di interesse per la ricerca di una procedura di soluzione, nel seguito si assumerà implicitamente  $m < n$ , in modo che la matrice  $\mathbf{A}$  abbia sempre rango  $m$ .

Indicando allora con  $\mathbf{B}$  le prime  $m$  colonne di  $\mathbf{A}$ , supposte linearmente indipendenti, e con  $\mathbf{x}_B$  i primi  $m$  elementi di  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{D}] \quad \mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_B^T \mid \mathbf{x}_D^T]$$

un vettore ammissibile con  $\mathbf{x}_D = \mathbf{0}$  si ottiene risolvendo il sottosistema  $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ , la cui soluzione:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

costituisce una *base* del sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  rispetto a  $\mathbf{B}$  ed individua, ancora con analogia geometrica, un vertice dell'iperpoliedro. Se una o più variabili in base sono nulle, la base si dice *degenere*. Se la base è anche ammissibile, si dirà a seconda dei casi *base ammissibile* o *base ammissibile degenere*. Se infine la base è anche ottimale si dirà *base ammissibile ottimale*.

Ciò precisato, sussiste il seguente *teorema fondamentale della programmazione lineare*: “Dato un programma lineare in forma normale, se esiste un vettore ammissibile esiste anche una base ammissibile e se esiste un vettore ammissibile ottimale esiste anche una base ammissibile ottimale”. In virtù di tale teorema sarà allora sufficiente limitare la ricerca di una soluzione alle basi, riconducendo il problema di ottimizzazione ad un problema di calcolo combinatorio, essendo le basi ammissibili in numero finito e pari a:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

In relazione alle effettive dimensioni del problema, la procedura di soluzione può comunque rivelarsi estremamente inefficiente se non affiancata ad un adeguato criterio di ricerca, come ad esempio l'*algoritmo del simplesso* (Hadley, 1962). Tale algoritmo, partendo da una base ammissibile iniziale (vertice dell'iperpoliedro) e tenendo presente la funzione obiettivo, per successivi miglioramenti procede da una base ammissibile all'altra (da un vertice all'altro lungo il segmento che li congiunge) fino al raggiungimento di una soluzione ottima. La Fig. A.1 riassume schematicamente il criterio di ricerca mediante l'algoritmo del simplesso per un programma lineare associato ad un sistema di disequazioni  $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  con  $n=3$  (Chong & Zak, 1996).

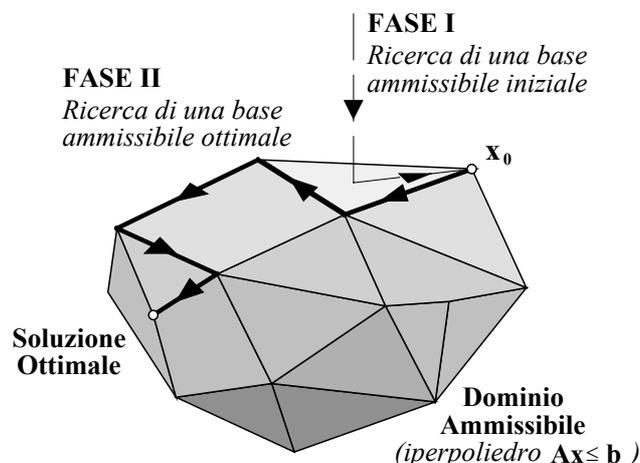


Fig. A.1 - Algoritmo del simplesso per un programma lineare associato ad un sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  con  $n = 3$ .

### **APPENDICE III - OPTIMAL PRESTRESSING IN FRAMED STRUCTURES**

The paper deals with the optimization of the prestressing forces and of the cable profiles in post-tensioned framed structures under multiple unrelated and not simultaneous load conditions.

The structure is subdivided into beam elements and the prestressing action is introduced by means of a self-equilibrated equivalent loading system, which is defined by taking approximately the instantaneous and the time-dependent losses into account. Therefore, the structural problem is reduced to an algebraic form and is translated into a mathematical linear programming problem by a suitable transformation of variables. In particular, the proposed formulation identifies a few cross-sectional values of both the intensity and the eccentricity of the prestressing force, which define the minimum cost solution under constraints on either the prestressing system, or the stress and displacement state. Finally, two examples (a continuous beam and a plane frame) show the potentialities of the proposed procedure, which leads to an optimal solution of the problem in a direct way after the structure has been discretized and the boundary conditions have been set.